Première partie

1. (a) La variable aléatoire Z admet une densité f_Z et la fonction Φ en est sa fonction de répartition selon la définition donnée. On en déduit que $\boxed{\Phi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

   (b) Comme f_Z est continue sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions usuelles qui le sont) alors Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = f_Z$. Mais f_Z est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (exponentielle !) donc $\boxed{\Phi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

   (c) Comme toute fonction de répartition : $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$. Par théorème de la bijection (continuité et stricte croissance), on en conclut que $\boxed{\Phi \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans }]0,1[}$.

   (d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que la fonction de densité f_Z est paire sur $\mathbb{R}$. Alors, par changement de variable affine $u = -t$:

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{x} f_Z(-u)(-1)\,\mathrm{d}u = \int_{x}^{+\infty} f_Z(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(u)\,\mathrm{d}u - \int_{-\infty}^{x} f_Z(u)\,\mathrm{d}u$$

   Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$.

2. (a) Loi faible des grands nombres : Si $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes admettant toutes la même espérance μ et la même variance $\sigma^2 \geqslant 0$ alors la suite $(\bar{X}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à μ.

   (b) Hypothèses du théorème limite central : Si $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes admettant toutes la même loi d'espérance μ et de variance $\sigma^2 > 0$ alors la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite. Autrement dit, comme Φ est continue sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leqslant x) = \Phi(x)}$$

3. (a) D'après la définition de l'espérance d'une variable discrète finie :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_i) = 0 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{5} + 10 \times \frac{1}{10} = 3}$$

   (b) De même, pour le calcul de $\mathbb{E}(X_i^2)$ puis celui de la variance grâce à la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{E}(X_i^2) = 0^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 5^2 \times \frac{1}{5} + 10^2 \times \frac{1}{10} = 17 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\mathbb{V}(X_i) = 17 - 3^2 = 8}$$

   (c) i. Soit $z \in \mathbb{R}$. Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ alors $f(U)$ est bien définie et est à valeurs dans $\{0, 2, 5, 10\}$. De plus :

$$\mathbb{P}(f(U) = 0) = \mathbb{P}\left(0 \leqslant U < \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5} = \mathbb{P}(X_i = 0)$$
$$\mathbb{P}(f(U) = 2) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{5} \leqslant U < \frac{7}{10}\right) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_i = 2)$$
$$\mathbb{P}(f(U) = 5) = \mathbb{P}\left(\frac{7}{10} \leqslant U < \frac{9}{10}\right) = \frac{9}{10} - \frac{7}{10} = \frac{1}{5} = \mathbb{P}(X_i = 5)$$
$$\mathbb{P}(f(U) = 10) = \mathbb{P}\left(\frac{9}{10} \leqslant U \leqslant 1\right) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} = \mathbb{P}(X_i = 10)$$

   Conclusion : $\boxed{\text{Si } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \text{ alors } f(U) \text{ a même loi que } X_i}$.

   ii. On applique la fonction f à U pour obtenir des résultats suivant la même loi que X_i :

```
function x = X()
    U = rand()
    if U<1/5 then
        x=0
    elseif U<7/10 then
        x=2
    elseif U<9/10 then
        x=5
    else x=10
    end
endfunction
```

   (d) Comme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ alors $\boxed{Z_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\frac{1}{n}S_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sigma(X_1)} = \sqrt{n}\,\dfrac{\frac{1}{n}S_n - 3}{\sqrt{8}}}$.

(e) D'après le théorème limite central, en considérant que $n = 200$ est assez grand, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{200} \leqslant 500)} = \mathbb{P}\left(\frac{1}{200}S_{200} \leqslant \frac{5}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{200}S_{200} - 3 \leqslant -\frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{200}{8}}\left(\frac{1}{200}S_{200} - 3\right) \leqslant -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{200}{8}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z_{200} \leqslant -\frac{1}{2}\sqrt{25}\right) = \mathbb{P}(Z_{200} \leqslant -2{,}5) \approx \boxed{\Phi(-2{,}5)} \approx 6 \cdot 10^{-3}$$

4. On partage l'intervalle $]0,1[$ en $2N$ intervalles régulièrement à l'aide des réels $k/(2N)$ et on détermine les antécédents par la fonction Φ des réels $x_0, x_1, \ldots, x_{2N-1}, x_{2N}$ bords de ces segments, ce qui permet de partager l'intervalle $\mathbb{R}$ en les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_{2N-1}, I_{2N}$.

(a) Pour $k \in [\![0, 2N]\!]$, les réels $\Phi(x_k)$ sont régulièrement répartis dans $[0,1]$ et pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2N} > 0$, la définition de la limite (obtenue par théorème limite central) donne :

$$\exists m_k \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \geqslant m_k,\ |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_k) - \Phi(x_k)| \leqslant \frac{1}{2N}$$

On pose alors : $n_0 = \max\{m_0, m_1, \ldots, m_k\}$. Ainsi :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall k \in [\![0, 2N]\!],\ (n \geqslant n_0 \geqslant m_k) \implies |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_k) - \Phi(x_k)| \leqslant \frac{1}{2N}$$

Pour le plus grand des écarts, on obtient : $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \;/\; \forall n \geqslant n_0,\ \max\limits_{k\in\{0,1,\ldots,2N\}} |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_k) - \Phi(x_k)| \leqslant \dfrac{1}{2N}}$.

(b) i. Comme $x < x_k$ alors, par croissance de la fonction de répartition de Z_n : $\mathbb{P}(Z_n \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(Z_n \leqslant x_k)$.
Comme $x > x_{k-1}$ alors, par croissance de la fonction Φ : $\Phi(x) \geqslant \Phi(x_{k-1})$ donc $-\Phi(x) \leqslant -\Phi(x_{k-1})$.
On en déduit, par somme des inégalités : $\boxed{\mathbb{P}(Z_n \leqslant x) - \Phi(x) \leqslant \mathbb{P}(Z_n \leqslant x_k) - \Phi(x_{k-1})}$.

ii. D'après **I.4.a**, on a : $|\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_k) - \Phi(x_k)| \leqslant \dfrac{1}{2N}$ donc $\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_k) \leqslant \Phi(x_k) + \dfrac{1}{2N}$ et en reportant dans **I.5.b.i** :

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n \leqslant x) - \Phi(x) \leqslant \underbrace{\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})}_{=1/(2N)} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N}}$$

par définition des « réels » x_{k-1} et x_k ($\Phi(x_0)$ désigne évidemment $\lim\limits_{t\to-\infty} \Phi(t) = 0$).

iii. On sait que : $\Phi(x) \leqslant \Phi(x_k)$ et $\mathbb{P}(Z_n \leqslant x) \geqslant \mathbb{P}(Z_n \leqslant x_{k-1})$ donc

$$\Phi(x) - \mathbb{P}(Z_n \leqslant x) \leqslant \Phi(x_k) - \mathbb{P}(Z_n \leqslant x_{k-1})$$

Comme $|\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_{k-1}) - \Phi(x_{k-1})| \leqslant \dfrac{1}{2N}$ (convient pour $k-1 = 0$ d'après la remarque précédente) alors :

$$\Phi(x_{k-1}) - \mathbb{P}(Z_n \leqslant x_{k-1}) \leqslant \frac{1}{2N} \qquad \text{donc} \qquad -\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_{k-1}) \leqslant \frac{1}{2N} - \Phi(x_{k-1})$$

d'où l'on tire que :

$$\Phi(x) - \mathbb{P}(Z_n \leqslant x) \leqslant \Phi(x_k) - \mathbb{P}(Z_n \leqslant x_{k-1}) \leqslant \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) + \frac{1}{2N} = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N}$$

Conclusion : $\boxed{\Phi(x) - \mathbb{P}(Z_n \leqslant x) \leqslant \dfrac{1}{N}}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un entier $k \in [\![1, 2N]\!]$ tel que $x \in I_k$ (partition de $\mathbb{R}$). On vient de voir que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ -\frac{1}{N} \leqslant \mathbb{P}(Z_n \leqslant x) - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{N} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant n_0,\ |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{N}}$$

(d) On vient de voir qu'une telle suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ existe en choisissant $M_n = 1/N$ (avec N fixé), mais cette suite ne converge pas vers 0 donc on va essayer de « faire varier N » vers l'infini. On a prouvé la proposition :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \;/\; \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant n_0,\ |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{N}$$

Posons $N_0 = N$ et $N_k = (k+1)N$. Pour $k = 0$, on a donc construit entier n_0 tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant n_0,\ |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{N_0}$$

Pour $k=1$, il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant n_1,\ |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{N_1} = \frac{1}{2N}$$

Supposons construits $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ tel que :

$$\forall i \in [\![0,k]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant n_i,\ |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{N_i} = \frac{1}{(i+1)N}$$

Alors, il existe $n_{k+1} > n_k$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant n_{k+1},\ |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{N_{k+1}} = \frac{1}{(k+2)N}$$

Par récurrence, il existe une suite strictement croissante de réels $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant n_k,\ |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{N_k} = \frac{1}{(k+1)N}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ou bien $n \geqslant n_0$ et il existe un entier k tel que $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ et on peut poser $M_n = \dfrac{1}{(k+1)N}$. Ou bien $n < n_0$ et on peut poser $M_n = 2$ (par inégalité triangulaire). Remarquons que $n_k > k$ (vrai pour $n_0 \geqslant 1 > 0$ et si $n_k > k$ alors $n_{k+1} > n_k \geqslant k+1$). On en déduit que $k \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ donc $M_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
Conclusion : $\boxed{\text{Il existe une suite } (M_n)_{n\geqslant 1} \text{ de majorants des fonctions } D_n \text{ telle que cette suite converge vers } 0}$.

5. (a) i. Par continuité de la fonction Φ, le théorème de limite séquentielle prouve que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x)}$.

ii. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par définition de M_n, on a :

$$0 \leqslant |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_n) - \Phi(x_n)| = |D_n(x_n)| \leqslant M_n$$

D'après la question **I.4.d** et avec le théorème de limite par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_n) - \Phi(x_n)| = 0}$.

iii. On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_n) - \Phi(x)| &= |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_n) - \Phi(x_n) + \Phi(x_n) - \Phi(x)| \\ &\leqslant |\mathbb{P}(Z_n \leqslant x_n) - \Phi(x_n)| + |\Phi(x_n) - \Phi(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{\textbf{I.5.a.ii} \text{ et } \textbf{I.5.a.i}} 0 + 0\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leqslant x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x)}$.

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements suivants forment une suite croissante donc par croissance de la probabilité :

$$\left[Z_n \leqslant x - \frac{1}{n}\right] \subset [Z_n < x] \subset [Z_n \leqslant x] \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbb{P}\left(Z_n \leqslant x - \frac{1}{n}\right) \leqslant \mathbb{P}(Z_n < x) \leqslant \mathbb{P}(Z_n \leqslant x)}$$

ii. Pour $x_n = x - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, la question **I.5.a.iii** donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(Z_n \leqslant x - \dfrac{1}{n}\right) = \Phi(x)$.
La question **I.2.b** donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leqslant x) = \Phi(x)$.
La question **I.5.b.i** et le théorème d'encadrement prouvent alors que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n < x) = \Phi(x)}$.

(c) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n \in [a,b]) = \mathbb{P}(Z_n \leqslant b) - \mathbb{P}(Z_n < a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(b) - \Phi(a)}$$

d'après le théorème limite central et le résultat précédent **I.5.b.ii**.

Deuxième partie

6. (a) On a : $\boxed{\mathbb{E}(X_i) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p}$ et $\mathbb{E}(X_i^2) = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$ donc $\boxed{\mathbb{V}(X_i) = p - p^2 = p(1-p)}$.

(b) La fonction polynomiale de degré 2 $p \mapsto p(1-p)$ s'annule en 0 et en 1 donc est maximale au milieu des racines en $p = 1/2$. Comme elle est positive que $[0,1]$ (entre les racines), on en déduit que : $0 \leqslant p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Alors : $\boxed{\sigma \leqslant \dfrac{1}{2}}$.

(c) Par linéarité de l'espérance : $\boxed{\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = p}$.

(d) Comme les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes alors :

$$\boxed{\mathbb{V}(\bar{X}_n)} = \frac{1}{n^2}\,\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}\left(\mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma = \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}$$

7. (a) Soit $a > 0$. Alors $-a < a$. D'après **I.5.c**, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - p) \in [-a, a]\right) = \mathbb{P}\left(Z_n \in [-a, a]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(a) - \Phi(-a)}$$

(b) D'après **I.1.d** : $\Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - [1 - \Phi(a)] = 2\Phi(a) - 1$. De plus :

$$\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - p) \in [-a, a]\right] = \left[-a \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - p) \leqslant a\right] = \left[-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \bar{X}_n - p \leqslant a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[\bar{X}_n - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant \bar{X}_n + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(p \in \left[\bar{X}_n - a\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + a\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 2\Phi(a) - 1}$.

(c) Pour $a = 1,96$ on a donc $\Phi(a) = 0,975$ et alors $2\Phi(a) - 1 = 0,95$. Ainsi le résultat précédent donne :

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand, } \mathbb{P}\left(p \in \left[\bar{X}_n - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \approx 0,95}$$

(d) En utilisant la majoration de **II.6.b**, on obtient : $1,96\sigma \leqslant 1,96/2 = 0,98$ et de plus :

$$\left[\bar{X}_n - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[\bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right]$$

donc par croissance de la probabilité :

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand, } \mathbb{P}\left(p \in \left[\bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right]\right) \gtrapprox 0,95}$$

8. (a) Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$V_n - \sigma^2 - \frac{1}{n} = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) + \frac{1}{n} - p(1-p) - \frac{1}{n} = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) - p(1-p)$$

$$(\bar{X}_n - p)(1 - \bar{X}_n - p) = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) - \bar{X}_n p - p(1 - \bar{X}_n) + p^2 = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) - p + p^2 = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) - p(1-p)$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n - \sigma^2 - \dfrac{1}{n} = (\bar{X}_n - p)(1 - \bar{X}_n - p)}$.

(b) Soit $n \geqslant 1$. On déduit de ce résultat et de l'inégalité triangulaire que :

$$V_n - \sigma^2 = (\bar{X}_n - p)((1-p) - \bar{X}_n) + \frac{1}{n} \qquad \left|V_n - \sigma^2\right| \leqslant \left|(\bar{X}_n - p)((1-p) - \bar{X}_n)\right| + \frac{1}{n}$$

Comme les variables X_i suivent toutes une loi de Bernoulli alors :

$$0 \leqslant \bar{X}_n \leqslant 1 \qquad \text{donc} \qquad \left|(1-p) - \bar{X}_n\right| \leqslant 1 + 1$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|V_n - \sigma^2\right| \leqslant 2\left|\bar{X}_n - p\right| + \dfrac{1}{n}}$.

(c) Soit $n \geqslant 1$. Alors :

$$\left[\left|V_n - \sigma^2\right| > \varepsilon\right] \subset \left[2\left|\bar{X}_n - p\right| + \frac{1}{n} > \varepsilon\right] = \left[\left|\bar{X}_n - p\right| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right]$$

Par croissance de la probabilité : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\left|V_n - \sigma^2\right| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - p\right| > \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{1}{2n}\right)}$.

(d) Comme $\dfrac{1}{2n} \to 0$ lorsque $n \to 0$ alors, par définition de la limite avec le réel $\dfrac{\varepsilon}{4} > 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ /\ \forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant \frac{1}{2n} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

d'où l'on tire que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \left[\left|\bar{X}_n - p\right| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right] \subset \left[\left|\bar{X}_n - p\right| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right]$$

Par croissance de la probabilité : $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ /\ \forall n \geqslant n_0,\ \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - p\right| > \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{1}{2n}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - p\right| > \dfrac{\varepsilon}{4}\right)}$.

(e) D'après le théorème de loi faible des grands nombres (les hypothèses sont satisfaites) :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left|V_n - \sigma^2\right| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - p\right| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - p\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par théorème d'encadrement : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|V_n - \sigma^2\right| > \varepsilon\right) = 0}$ (donc $V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$).

9. (a) i. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$[W_n \leqslant x] \subset \left[Z_n \leqslant x\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\right] \qquad \text{donc} \qquad \mathbb{P}\left(W_n \leqslant x\right) \leqslant \mathbb{P}\left(Z_n \leqslant x\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\right)$$

Par formule des probabilités totales avec le système complet $\left(\left[\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} \leqslant 1+\varepsilon\right], \left[\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right]\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z_n \leqslant x\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\right) &= \mathbb{P}\left(\left[Z_n \leqslant x\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\right] \cap \left[\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} \leqslant 1+\varepsilon\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[Z_n \leqslant x\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\right] \cap \left[\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right]\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left([Z_n \leqslant x(1+\varepsilon)] \cap \left[\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} \leqslant 1+\varepsilon\right]\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(Z_n \leqslant x(1+\varepsilon)\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

Les deux inégalités donnent : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(W_n \leqslant x\right) \leqslant \mathbb{P}\left(Z_n \leqslant (1+\varepsilon)x\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right)}$.

ii. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{V_n} > \sigma + \varepsilon\sigma\right) = \mathbb{P}\left(V_n > \sigma^2 + 2\varepsilon\sigma^2 + 4\varepsilon^2\sigma^2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(V_n - \sigma^2 > 2\varepsilon\sigma^2 + 4\varepsilon^2\sigma^2\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|V_n - \sigma^2\right| > 2\varepsilon\sigma^2 + 4\varepsilon^2\sigma^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

d'après **II.8.e**. Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right) = 0}$.

iii. D'après le théorème limite central : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(Z_n \leqslant (1+\varepsilon)x\right) = \Phi((1+\varepsilon)x)}$.

iv. Par définition de la limite nulle utilisée avec le réel $\varepsilon/2 > 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ /\ \forall n \geqslant n_0,\ \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Par définition de l'autre limite :

$$\exists n_\varepsilon \geqslant n_0 \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ \mathbb{P}\left(Z_n \leqslant (1+\varepsilon)x\right) \leqslant \Phi((1+\varepsilon)x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors, par somme des inégalités : $\boxed{\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \ /\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ \mathbb{P}\left(W_n \leqslant x\right) \leqslant \Phi((1+\varepsilon)x) + \varepsilon}$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. D'après le résultat symétrique admis conjugué à l'inégalité qui précède (on considère le plus grand des deux entiers n_ε que l'on nomme encore n_ε) :

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon,\ \Phi((1-\varepsilon)x) - \varepsilon \leqslant \mathbb{P}\left(W_n \leqslant x\right) \leqslant \Phi((1+\varepsilon)x) + \varepsilon$$

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon,\ \Phi(x-\varepsilon x) - \Phi(x) - \varepsilon \leqslant \mathbb{P}\left(W_n \leqslant x\right) - \Phi(x) \leqslant \Phi(x+\varepsilon x) - \Phi(x) + \varepsilon$$

Par inégalité des accroissements finis :

$$|\Phi(x+\varepsilon x) - \Phi(x)| \leqslant |\varepsilon x| \max_{t\in[x,x+\varepsilon x]} f_Z(t) \leqslant \frac{\varepsilon\,|x|}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \varepsilon\,|x|$$

$$|\Phi(x-\varepsilon x) - \Phi(x)| \geqslant |\varepsilon x| \max_{t\in[x,x-\varepsilon x]} f_Z(t) \leqslant \frac{\varepsilon\,|x|}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \varepsilon\,|x|$$

d'où l'on déduit que, pour tout entier $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$-\varepsilon\,|x| - \varepsilon \leqslant \mathbb{P}\left(W_n \leqslant x\right) - \Phi(x) \leqslant \varepsilon\,|x| + \varepsilon \qquad \text{donc} \qquad |\mathbb{P}\left(W_n \leqslant x\right) - \Phi(x)| \leqslant \varepsilon\left(1+|x|\right)$$

Comme $\varepsilon\left(1+|x|\right) > 0$, on a bien obtenu la définition de la limite : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(W_n \leqslant x\right) = \Phi(x)}$.

10. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}\left(p \geqslant \bar{X}_n - x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - p \leqslant x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V_n}}(\bar{X}_n - p) \leqslant x\right) = \mathbb{P}(W_n \leqslant x)$$

D'après le résultat établi en **II.9.b**, on conclut que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(p \geqslant \bar{X}_n - x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(x)}$.

(b) Pour $n = 1000$, $\bar{X}_{1000}(\omega) = 0.52$, $V_{1000}(\omega) = 0.2506$, on obtient :

$$0.52 - x\frac{\sqrt{0.2506}}{\sqrt{1000}} \geqslant \frac{1}{2} \iff \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0.2506}}\left(0,52 - \frac{1}{2}\right) \leqslant x$$

Alors, considérant que $n = 1000$ est assez grand :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(p \geqslant \frac{1}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0.2506}}\left(0,52 - \frac{1}{2}\right)\right)} \approx \Phi(1,27) \approx 0.9$$

11. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Alors :

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 + (1-1)T_i(\omega) & \text{si } X_i(\omega) = 1 \\ 0 + (1-0)T_i(\omega) & \text{si } X_i(\omega) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 1 \\ T_i(\omega) & \text{si } X_i(\omega) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 1 \\ 1 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \text{ et } T_i(\omega) = 1 \\ 0 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \text{ et } T_i(\omega) = 0 \end{cases}$$

donc Y_i est une variable de Bernoulli. De plus, on obtient :

$$[Y_i = 1] = [X_i = 1] \cup ([X_i = 1] \cap [T_i = 1])$$

Par incompatibilité des événements de la réunion et par indépendance de ceux de l'intersection :

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1) + \mathbb{P}(X_i = 0)\,\mathbb{P}(T_i = 1) = \boxed{p + (1-p)q = r}$$

Conclusion : $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p+q-pq)}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left[p \geqslant \frac{1}{1-q}\left(\bar{Y}_n - x\frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}} - q\right)\right] = \left[q + p - pq \geqslant \bar{Y}_n - x\frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}}\right] = \left[\bar{Y}_n - r \leqslant x\frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{U_n}}(\bar{Y}_n - r) \leqslant x\right]$$

Le résultat admis prouve donc que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(p \geqslant \frac{1}{1-q}\left(\bar{Y}_n - x\frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}} - q\right)\right) = \Phi(x)}$.

(c) Comme en **II.10.b** :

$$\frac{1}{1-q}\left(\bar{y}_n - x\frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n}} - q\right) \geqslant \frac{1}{2} \iff \bar{y}_n - x\frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n}} - q \geqslant \frac{1-q}{2} \iff \bar{y}_n - x\frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1+q}{2} \iff \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{u_n}}\left(\bar{y}_n - \frac{1+q}{2}\right) \geqslant x$$

donc, pour $x = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{u_n}}\left(\bar{y}_n - \frac{1+q}{2}\right)$, la limite précédente donne : $\boxed{\mathbb{P}\left(p \geqslant \frac{1}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{u_n}}\left(\bar{y}_n - \frac{1+q}{2}\right)\right)}$.

(d) L'application numérique donne alors :

$$\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,52 \times 0,48 + \frac{1}{1000}}}\left(0,52 - \frac{1,04}{2}\right) = 0 \qquad \Phi(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\mathbb{P}\left(p \geqslant \frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2}}$$

Troisième partie

12. (a) i. Les fonctions $u \mapsto \frac{1}{4}u^4$ et $u \mapsto (1-u)^3$ sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$ d'où

$$\int_0^1 u^3(1-u)^3\,\mathrm{d}u = \cancel{\left[\frac{1}{4}u^4(1-u)^3\right]_0^1} - \int_0^1 \frac{1}{4}u^4(-3)(1-u)^2\,\mathrm{d}u = \frac{3}{4}\int_0^1 u^4(1-u)^2\,\mathrm{d}u$$

On continue sur le même modèle :

$$\int_0^1 u^4(1-u)^2\,\mathrm{d}u = \cancel{\left[\frac{1}{5}u^5(1-u)^2\right]_0^1} - \int_0^1 \frac{1}{5}u^5(-2)(1-u)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{5}\int_0^1 u^5(1-u)\,\mathrm{d}u$$

$$\int_0^1 u^5(1-u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{6}u^6(1-u)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{6}u^6(-1)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\int_0^1 u^6\,\mathrm{d}u$$

Au final :

$$\boxed{\int_0^1 u^3(1-u)^3\,\mathrm{d}u = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}\int_0^1 u^6\,\mathrm{d}u = \frac{1}{20}\int_0^1 u^6\,\mathrm{d}u}$$

ii. Comme $\displaystyle\int_0^1 u^6\,\mathrm{d}u)\left[\frac{1}{7}u^7\right]_0^1 = \frac{1}{7}$ alors $\boxed{\displaystyle\int_0^1 u^3(1-u)^3\,\mathrm{d}u = \frac{1}{140}}$.

(b) Par construction, h est continue sur $]-\infty,0[$ (constante), sur $]0,1[$ (intégrale fonction de sa borne supérieure) et sur $]1,+\infty[$ (constante). De plus, par propriété de l'intégrale fonction de sa borne supérieure :

$$h(0)=0 \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z<0}} h(z) = 0 \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \int_0^z u^3(1-u)^3\,\mathrm{d}u = 0$$

$$h(1)=1 \qquad \lim_{\substack{z\to 1\\ z>1}} h(z) = 1 \qquad \lim_{\substack{z\to 1\\ z<1}} 140\int_0^z u^3(1-u)^3\,\mathrm{d}u = 140\int_0^1 u^3(1-u)^3\,\mathrm{d}u = 1$$

donc h est continue en 0 et en 1. Conclusion : $\boxed{h \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

(c) L'intégrale fonction de sa borne supérieure est croissante lorsque la fonction à intégrer est positive sur le segment d'intégration, ce qui est le cas ici sur $[0,1]$. Compte tenu de la continuité et des parties constantes de h, on conclut que : $\boxed{\forall z\in\mathbb{R},\ 0\leqslant h(z)\leqslant 1}$. *On admet que h', h'' et h''' sont aussi continues et bornées sur $\mathbb{R}$.*

13. (a) i. La fonction $z\mapsto \dfrac{z-x}{a_n}$ est affine donc continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction h qui est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$. La fonction $t\mapsto 1-t$ est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ donc, par compositions successives, $\boxed{\text{la fonction } g_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ à valeurs dans } [0,1]}$ (c'est-à-dire que $\forall z\in\mathbb{R},\ 0\leqslant g_n(z)\leqslant 1$).

ii. Par dérivations successives de fonctions composées, pour tout réel z :

$$g_n'(z) = -\frac{1}{a_n}h'\left(\frac{z-x}{a_n}\right) \qquad g_n''(z) = \frac{1}{a_n^2}h''\left(\frac{z-x}{a_n}\right) \qquad g_n'''(z) = -\frac{1}{a_n^3}h'''\left(\frac{z-x}{a_n}\right) = n^{1/4}h'''\left(\frac{z-x}{a_n}\right)$$

Alors :

$$\forall z\in\mathbb{R},\ |g_n'''(z)| = n^{1/4}\left|h'''\left(\frac{z-x}{a_n}\right)\right| \leqslant n^{1/4}M_{h'''} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{M_{g_n'''}\leqslant n^{1/4}M_{h'''}}$$

(b) i. Soit $z\in\mathbb{R}$. Remarquons que h est strictement croissante sur $]0,1[$ et, par continuité, sur $[0,1]$. Alors :

$$\forall z\in\mathbb{R},\ h(z)\in\,]0,1[\iff z\in\,]0,1[$$

On en déduit que :

$$g_n(z)=1 \iff h\left(\frac{z-x}{a_n}\right)=0 \iff \frac{z-x}{a_n}\leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad g_n(z)=0 \iff h\left(\frac{z-x}{a_n}\right)=1 \iff \frac{z-x}{a_n}\geqslant 1$$

Conclusion : $\boxed{g_n(z)=1 \iff z\leqslant x}$ et $\boxed{g_n(z)=0 \iff z\geqslant x+a_n \impliedby z>x+a_n}$.

ii. Soit $\omega\in\Omega$. Alors :

$$\mathbb{1}_{[X\leqslant x]}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega)>x\\ 1 & \text{si } X(\omega)\leqslant x\end{cases} \qquad \mathbb{1}_{[X\leqslant x+a_n]}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega)>x+a_n\\ 1 & \text{si } X(\omega)\leqslant x+a_n\end{cases}$$

D'après le résultat qui précède :

$$(g_n(X))(\omega) = g_n(X(\omega)) = 1-h\left(\frac{X(\omega)-x}{a_n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega)\geqslant x+a_n\\ t\in\,]0,1[& \text{si } x<X(\omega)<x+a_n\\ 1 & \text{si } X(\omega)\leqslant x\end{cases}$$

donc : $\mathbb{1}_{[X\leqslant x]}(\omega)\leqslant (g_n(X))(\omega)\leqslant \mathbb{1}_{[X\leqslant x+a_n]}(\omega)$. Conclusion : $\boxed{\mathbb{1}_{[X\leqslant x]}\leqslant g_n(X)\leqslant \mathbb{1}_{[X\leqslant x+a_n]}}$.

(c) Comme la variable de Bernoulli $\mathbb{1}_{[X\leqslant x]}$ admet pour espérance $\mathbb{P}\left(\mathbb{1}_{[X\leqslant x]}=1\right)=\mathbb{P}(X\leqslant x)$ (et il en va de même pour $\mathbb{1}_{[X\leqslant x+a_n]}$) alors, pour $X=Z_n$ on obtient (EXISTENCE de l'espérance de $g_n(Z_n)$? ?) :

$$\mathbb{P}(Z_n\leqslant x) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[Z_n\leqslant x]}) \leqslant \mathbb{E}(g_n(Z_n))$$

et pour $X=Z_n+a_n$ on obtient :

$$\mathbb{E}(g_n(Z_n+a_n)) \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[Z_n+a_n\leqslant x+a_n]}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[Z_n\leqslant x]}) = \mathbb{P}(Z_n\leqslant x)$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(g_n(Z_n+a_n))\leqslant \mathbb{P}(Z_n\leqslant x)\leqslant \mathbb{E}(g_n(Z_n))}$.

14. (a) Soit $(z,u)\in\mathbb{R}^2$. Les fonction g'' et $t\mapsto(z+u-t)^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (g est de classe $\mathcal{C}^3$), et on procédera ainsi une seconde fois ensuite, donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_z^{z+u}(z+u-t)^2g'''(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{(z+u-t)^2}{2}g''(t)\right]_z^{z+u}-\int_z^{z+u}(-1)(z+u-t)g''(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{u^2}{2}g''(z)+\int_z^{z+u}(z+u-t)g''(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{u^2}{2}g''(z)+[(z+u-t)g'(t)]_z^{z+u}-\int_z^{z+u}(-1)g'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{u^2}{2}g''(z)-ug'(z)+\int_z^{z+u}g'(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{u^2}{2}g''(z)-ug'(z)+[g(t)]_z^{z+u}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall(z,u)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{1}{2}\int_z^{z+u}(z+u-t)^2g'''(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}u^2g''(z)-ug'(z)+g(z+u)-g(z)}$.

(b) Soit $(u,v,z)\in\mathbb{R}^3$. D'après la formule que l'on vient d'établir avec $z+u$ et $z+v$:

$$g(z+u)=g(z)+ug'(z)+\frac{u^2}{2}g''(z)+\frac{1}{2}\int_z^{z+u}(z+u-t)^2g'''(t)\,\mathrm{d}t$$

$$g(z+v)=g(z)+vg'(z)+\frac{v^2}{2}g''(z)+\frac{1}{2}\int_z^{z+v}(z+v-t)^2g'''(t)\,\mathrm{d}t$$

Par différence des deux égalités :

$$\boxed{g(z+u)-g(z+v)=g'(z)(u-v)+\frac{1}{2}g''(z)(u^2-v^2)+R(z,u,v)}$$

avec $\boxed{R(z,u,v)=\frac{1}{2}\int_z^{z+u}(z+u-t)^2g'''(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_z^{z+v}(z+v-t)^2g'''(t)\,\mathrm{d}t}$.

(c) Supposons que g''' soit bornée. Soit $(z,u,v)\in\mathbb{R}^3$ (on ne sait donc rien sur les signes respectifs de ces réels). Par inégalité triangulaire (sur les réels puis sur les intégrales) :

$$\begin{aligned}|R(z,u,v)| &\leqslant \frac{1}{2}\left|\int_z^{z+u}(z+u-t)^2\left|g'''(t)\right|\,\mathrm{d}t\right|+\frac{1}{2}\left|\int_z^{z+v}(z+v-t)^2\left|g'''(t)\right|\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \frac{M_{g'''}}{2}\left|\int_z^{z+u}(z+u-t)^2\,\mathrm{d}t\right|+\frac{M_{g'''}}{2}\left|\int_z^{z+v}(z+v-t)^2\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \frac{M_{g'''}}{2}\left|\left[-\frac{(z+u-t)^3}{3}\right]_z^{z+u}\right|+\frac{M_{g'''}}{2}\left|\left[-\frac{(z+v-t)^3}{3}\right]_z^{z+v}\right|=\frac{M_{g'''}}{6}\left(\left|u^3\right|+\left|v^3\right|\right)\end{aligned}$$

Enfin : $\boxed{\text{Si } g''' \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \text{ alors } \forall(z,u,v)\in\mathbb{R}^3,\ |R(z,u,v)|\leqslant\frac{1}{6}M_{g'''}\left(|u|^3+|v|^3\right)}$.

15. (a) i. Par stabilité des lois normales par somme de variables indépendantes : $\boxed{\sum_{i=1}^n Y_i\hookrightarrow\mathcal{N}(n\cdot 0,n\cdot 1)=\mathcal{N}(0,n)}$.

ii. Par stabilités des lois normales par transfert affine (linéaire ici) : $\boxed{T_n\hookrightarrow\mathcal{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}0,\frac{1}{\sqrt{n}^2}n\right)=\mathcal{N}(0,1)}$.

(b) i. Soit $k\in\{1,\ldots,n-1\}$. Alors :

$$W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(Y_1+\cdots+Y_{k-1}+\underline{Y_k}+X_{k+1}+\cdots+X_n\right)\quad\text{(convient encore pour } k=1)$$

$$W_{k+1}+\frac{1}{\sqrt{n}}X_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(Y_1+\cdots+Y_k+\underline{X_{k+1}}+X_{k+2}\cdots+X_n\right)\quad\text{(convient encore pour } k=n-1)$$

donc : $\boxed{\forall k\in\{1,\ldots,n-1\},\ W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k=W_{k+1}+\frac{1}{\sqrt{n}}X_{k+1}}$.

ii. On utilise ce résultat dans un télescopage :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\left(g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-g_n\left(W_{k+1}+\frac{1}{\sqrt{n}}X_{k+1}\right)\right)\\ &= g_n\left(W_1+\frac{1}{\sqrt{n}}X_1\right)-g_n\left(W_n+\frac{1}{\sqrt{n}}X_n\right)\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right)=g_n\left(W_1+\frac{1}{\sqrt{n}}X_1\right)-\cancel{g_n\left(W_n+\frac{1}{\sqrt{n}}X_n\right)}$$
$$+\cancel{g_n\left(W_n+\frac{1}{\sqrt{n}}X_n\right)}-g_n\left(W_n+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_n\right)$$

En remarquant, pour finir, que $Z_n=W_1+\frac{1}{\sqrt{n}}X_1$ et $T_n=W_n+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_n$, on peut conclure que :

$$\boxed{g_n(Z_n)-g_n(T_n)=\sum_{k=1}^{n}\left(g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right)}$$

(c) i. Soit $k\in\{1,\dots,n\}$. Les variables $Y_1,\dots,Y_{k-1},Y_k,X_k,X_{k+1},\dots,X_n$ sont indépendantes donc, par lemme des coalitions, les variables aléatoires X_k-Y_k et $g_n'(W_k)=g_n'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(Y_1+\cdots+Y_{k-1}+X_{k+1}+\cdots+X_n\right)\right)$ sont indépendantes (c'est bien encore le cas lorsque $k=1$ et lorsque $k=n$). Or :

$$\mathbb{E}(X_k-Y_k)=\mathbb{E}(X_k)-\mathbb{E}(Y_k)=0-0=0$$

donc l'indépendance qui précède permet d'écrire :

$$\boxed{\mathbb{E}\left((X_k-Y_k)g_n'(W_k)\right)=\mathbb{E}\left(X_k-Y_k\right)\mathbb{E}\left(g_n'(W_k)\right)=0}$$

(la fonction g_n' est bornée sur $\mathbb{R}$ donc l'espérance $\mathbb{E}\left(g_n'(W_k)\right)$ est bien définie, implicite une fois de plus).

ii. Le raisonnement est le même par lemme des coalitions (seules les fonctions de transferts changent, pas les paquets) :

$$\boxed{\mathbb{E}\left((X_k^2-Y_k^2)g_n''(W_k)\right)}=\mathbb{E}\left(X_k^2-Y_k^2\right)\mathbb{E}\left(g_n''(W_k)\right)=\left[\mathbb{E}(X_k^2)-\mathbb{E}(Y_k^2)\right]\mathbb{E}\left(g_n''(W_k)\right)$$
$$=\left[\mathbb{V}(X_k)-\mathbb{V}(Y_k)\right]\mathbb{E}\left(g_n''(W_k)\right)=[1-1]\,\mathbb{E}\left(g_n''(W_k)\right)=\boxed{0}$$

iii. D'après **III.14.b** appliqué à $g=g_n$ (fonction de classe $\mathcal{C}^3$ à dérivées successives bornées sur $\mathbb{R}$), $z=W_k$, $u=X_k/\sqrt{n}$ et $v=Y_k/\sqrt{n}$, on obtient :

$$g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(X_k-Y_k\right)g_n'(W_k)+\frac{1}{2n}\left(X_k^2-Y_k^2\right)g_n''(W_k)+R\left(W_k,\frac{X_k}{\sqrt{n}},\frac{Y_k}{\sqrt{n}}\right)$$

Par linéarité de l'espérance et en utilisant les deux valeurs d'espérances qui précèdent :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right)=\mathbb{E}\left(R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right)}$$

(d) Toujours par linéarité de l'espérance appliquée au résultat **III.15.b.ii** :

$$\mathbb{E}\left(g_n(Z_n)\right)-\mathbb{E}\left(g_n(T_n)\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right)$$

Par inégalité triangulaire et convergence absolue : $\boxed{\left|\mathbb{E}\left(g_n(Z_n)\right)-\mathbb{E}\left(g_n(T_n)\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left|R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right|\right)}$.

(e) Soit $k\in\{1,\dots,n\}$. On peut appliquer maintenant **III.14.c** (puisque g_n''' est bornée sur $\mathbb{R}$) :

$$\left|R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right|\leqslant\frac{1}{6}M_{g'''}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right|^3+\left|\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right|^3\right)=\frac{1}{6n\sqrt{n}}M_{g'''}\left(|X_k|^3+|Y_k|^3\right)$$

Par croissance de l'espérance (X_k et Y_k admettent un moment d'ordre 3) :

$$\mathbb{E}\left(\left|R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right|\right)\leqslant\frac{1}{6n\sqrt{n}}M_{g'''}\left(\mathbb{E}\left(|X_k|^3\right)+\mathbb{E}\left(|Y_k|^3\right)\right)$$

Toutes les variables X_k admettent le même moment d'ordre 3 (il en va de même pour les Y_k) :

$$\mathbb{E}\left(\left|R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right|\right)\leqslant\frac{1}{6n\sqrt{n}}M_{g'''}\left(\mathbb{E}\left(|X_1|^3\right)+\mathbb{E}\left(|Y_1|^3\right)\right)$$

(majorant indépendant de k). On applique l'inégalité de la question précédente :

$$|\mathbb{E}(g_n(Z_n)) - \mathbb{E}(g_n(T_n))| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\left|R\left(W_k, \frac{1}{\sqrt{n}}X_k, \frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right|\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6n\sqrt{n}} M_{g'''} \left(\mathbb{E}\left(|X_1|^3\right) + \mathbb{E}\left(|Y_1|^3\right)\right)$$

Conclusion : $\boxed{|\mathbb{E}(g_n(Z_n)) - \mathbb{E}(g_n(T_n))| \leqslant \frac{1}{6\sqrt{n}} M_{g_n'''} \left(\mathbb{E}\left(|X_1|^3\right) + \mathbb{E}\left(|Y_1|^3\right)\right)}$.

(f) Le résultat **III.13.a.ii** permet d'effectuer une majoration supplémentaire :

$$|\mathbb{E}(g_n(Z_n)) - \mathbb{E}(g_n(T_n))| \leqslant \frac{1}{6\sqrt{n}} n^{1/4} M_h \left(\mathbb{E}\left(|X_1|^3\right) + \mathbb{E}\left(|Y_1|^3\right)\right) = \frac{M_h}{6n^{1/4}} \left(\mathbb{E}\left(|X_1|^3\right) + \mathbb{E}\left(|Y_1|^3\right)\right)$$

Cette fois-ci, M_h ne dépend plus de n (au contraire de $M_{g_n'''}$) donc on peut conclure par théorème d'encadrement puisque la valeur absolue est positive et $\frac{1}{n^{1/4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} |\mathbb{E}(g_n(Z_n)) - \mathbb{E}(g_n(T_n))| = 0}$.

16. (a) Soit $n \geqslant 1$. Par théorème de transfert (il y a bien convergence absolue puisque $|g| \leqslant 1$), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g_n(T_n)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) \cdot f_{T_n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 1 \cdot f_{T_n}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{x+a_n} g_n(t) \cdot f_{T_n}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x+a_n}^{+\infty} 0 \cdot f_{T_n}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathbb{P}(T_n \leqslant x) + \int_{x}^{x+a_n} g_n(t) \cdot f_{T_n}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme :

$$0 \leqslant \int_{x}^{x+a_n} g_n(t) \cdot f_{T_n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x}^{x+a_n} f_{T_n}(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{P}(T_n \leqslant x + a_n) - \mathbb{P}(T_n \leqslant x)$$

alors on conclut que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T_n \leqslant x) \leqslant \mathbb{E}(g_n(T_n)) \leqslant \mathbb{P}(T_n \leqslant x + a_n)}$.

(b) Comme $T_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ (question **III.15.a.ii**) pour tout entier $n \geqslant 1$, la double inégalité obtenue sur traduit par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Phi(x) \leqslant \mathbb{E}(g_n(T_n)) \leqslant \Phi(x + a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(x)$$

(par continuité de Φ et théorème de limite séquentielle). Par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(g_n(T_n)) = \Phi(x)}$.

(c) Les limites **III.15.f** et **III.16.b** donnent alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(g_n(Z_n)) = \Phi(x)}$.