ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

T.P. n°2

Fonctions, suites et séries.
Représentations graphiques.

Exercice 1.

(1) Rappeler les DL à l'ordre 1 et 2 de $\ln(1+x)$ en 0.

(2) Que fait le programme suivant? Pourquoi y a-t-il des "prime" à la ligne (8)? Réécrire les lignes (7) et (8) en remplaçant `plot2d()` par `plot()`.

```
(1) function y=f(x)
(2)     y=log(x+1)
(3) endfunction

(4) function y=g(x)
(5)     y=x-x^2/2
(6) endfunction

(7) x=-1.01:.01:1 ; y=feval(x,f); z=feval(x,g);
(8) plot2d(x, [y',x',z'])
```

Exercice 2. (Extrait de **EML 2019**, Exercice 3) On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n}.$$

(1) Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction `SciLab` suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
function u = suite(n)
    u  = 1
    for k = ..............
        u = ..............
    end
endfunction
```

(2) Il est possible de montrer (mais on s'en dédouane dans ce TP) que (u_n) converge vers une limite ℓ et que, pour tout $p \geq 2$,

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

Écrire alors une fonction `SciLab` qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 3. (Suites à récurrence linéaire d'ordre 2). On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$

(1) Calculer à la main u_2, u_3 et u_4.
Recopier dans SciNotes le script suivant calculer alors les mêmes termes qu'en début de question. Pourquoi y a-t-il un problème? Modifier le programme en conséquence.

```
function res=U(n)
    u=0
    res=1
    for i=2:n
        u=res
        res=(7/2)*v-(3/2)*u
    end
endfunction
```

(2) (a) Représenter graphiquement les 51 premiers termes de la suite (z_n) définie par $z_n = u_n/3^n$.
(b) Par lecture graphique, déterminer un équivalent de u_n.
(c) Quelle est l'expression du terme général de (u_n)?

Exercice 4. On considère la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{4^k + \ln(k+1) + 1}$.

(1) Donner un équivalent du terme général de la série.
(2) Justifier que cette série converge. On note S sa somme.
(3) On souhaite déterminer une valeur approchée de S.
(a) Montrer que :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k + \ln(k) + 1} - S \right| \leq \frac{1}{3 \times 4^n}.$$

(b) Écrire une fonction `SciLab`, d'entête `y=S_approx(eps)` prenant en paramètre un réel `eps` et renvoyant une valeur approchée de S à `eps` près.

Rappels: opérations pointées et `cumsum( )`

☞ Si `x` est une matrice (et *a fortiori* un vecteur ligne ou colonne), l'opération `x.^k` permet de définir la matrice obtenue en élevant chaque coefficient de `x` à la puissance `k`

Par exemple, l'instruction `[1:5].^(-1)` renvoie le vecteur

$$\left[1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}\right]$$

☞ Si `v` est un vecteur, la l'instruction `cumsum(v)` renvoie un vecteur de même longueur dont le i−ème coefficient est la somme des i premiers éléments de `v`.

Par exemple, l'instruction `cumsum(1:5)` renvoie le vecteur $[1, 3, 6, 10, 15]$.

Exercice 5.

(1) Compléter la fonction (et le programme) ci-dessous afin que celle-ci renvoie un vecteur dont les composantes sont les sommes partielles de la série

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n}$$

```
function U=S_alt(n)
    v=((-1)^[1:n]).*([1:n].^(-1))
    U=cumsum(v)
endfunction

n=input('n=?')
plot2d(........., ......., -1)
```

(2) Commenter la figure obtenue.
(3) Transformer le programme précédent pour étudier graphiquement la convergence absolue de la série (on pourra aussi faire figurer la courbe de $x \mapsto \ln(x)$). Commenter.

Exercice 6.
(1) Compléter la fonction suivante prenant en argument un entier $n \geq 1$ et renvoyant le vecteur `U` des $n+1$ premiers termes de la suite des sommes partielles de la série de terme général $u_n = n^2/3^n$.

```
function U=exo2(n)
    N=0:n;
    Y=....................
    U=cumsum(Y)
endfunction
```

(2) Représenter graphiquement les 101 premiers termes de la suite des sommes partielles et conjecturer quand à la nature de la série ainsi que sur la valeur de sa somme éventuelle.
(3) Retrouver ces résultats par une démonstration théorique.

Exercice 7. (D'après **ECRICOME 2015**)
On s'intéresse à la suite récurrente - étudiée dans le DS n°2 - (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = 1 - \exp(-u_n).$$

(1) Compléter le programme ci-dessous permettant le calcul des 100 premiers éléments de (u_n)

```
U=zeros(1, 100)
U(1)=................
for n=1: ...............
    U(n+1)=...........
end
plot2d(1:100, U, -1)
```

(2) On modifie le programme précédent en remplaçant la dernière ligne par les instructions suivantes

```
X=1:100
S=cumsum(U)
Y=log(X)
plot2d(X, S, -1)
plot2d(X, Y)
```

(a) Que représente le vecteur `S`?
(b) Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la nature de la série terme général u_n?

Exercice 8. (***Extrait de **ESSEC II 2016**) On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_n = u_{n-1}p_1 + u_{n-2}p_2 + ... + u_0 p_n.$$

Sous `SciLab`, soit `P=[`$p_1, ..., p_n$`]` le vecteur ligne tel que `P(j)=`p_j (pour $j \in [\![1; n]\!]$). Écrire un programme qui calcule u_n à partir de `P`. *On propose deux méthodes.*

Méthode 1: à compléter

```
U=zeros(1, n+1)
U(1)=1
for k=1:n
    for j=1:k
        U(k+1)=...............
    end
end
disp(.................)
```

Méthode 2: à comprendre

```
U=zeros(1, n+1)
U(1)=1
for k=1:n
    U(k+1)=U(1:k)*P(k:-1:1)'
end
disp(U(n+1))
```

Exercice 9. (D'après **EDHEC 2020**).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

(1) Calculer I_0 et I_1.
(2) Calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$. En déduire I_2.
(3) Déduire de la question précédente une fonction d'en-tête `function y=I(n)` qui renvoie la valeur de I_n.

Bonus.

José se rend au casino *Les requins de la côte* avec s euros en poche ($s \in \mathbb{N}^\star$) et l'envie de faire fortune. Après s'être vêtu de ses habits de lumière, il s'installe à une table où, à chaque partie, il gagne avec probabilité $p \in]0;1[$ un euro et perd avec probabilité $q = 1-p$ un euro.

On note N la somme dont dispose le casino (on peut raisonnablement supposer que $s < N$). José décide qu'il arrêtera de jouer s'il devient ruiné (c'est à dire lorsque sa fortune tombe à 0) ou lorsque ce sera le cas pour le casino. On s'intéresse à la probabilité que José soit ruiné.

Compléter la fonction suivante qui simule et représente la trajectoire de la fortune de José un soir de jeu, et la faire tourner dans `SciLab`. Qu'observe-t-on à chaque fois? (José jouera sûrement à la roulette américaine donc avec $p = 18/38$.)

```
function []=casino(n,N,p)
    k=1;
    fortune(k)=n; //argent de José au moment k=1
    tresor(k)=N; //réserves du casino au moment k=1
    while ................................
        r=rand();
        if .......................
            fortune(k+1)=...................
            tresor(k+1)=....................
        else
            ..........................
            ..........................
        end
        k=k+1;
    end
    plot2d(1:k, fortune, -1)
endfunction
```