ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

# Approfondissement

*Algèbre Linéaire un peu plus théorique*

## Exercice 1 - base de matrices diagonalisables

On cherche à répondre à la question suivante:

*Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composée uniquement de matrices diagonalisables ?*

On considère alors la base canonique $\mathcal{B} = (E_{i,j} : (i,j) \in [\![1;n]\!]^2)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

et on pose

$$M_{i,j} = \begin{cases} D + E_{i,j}, & \text{si } i \neq j \\ E_{i,i}, & \text{si } i = j \end{cases}$$

(1) Que peut-on dire de $M_{i,j}$ si $i = j$?
(2) Justifier que chaque matrice $M_{i,j}$ est diagonalisable.
(3) On cherche à montrer que la famille $\mathcal{B}' = (M_{i,j} : (i,j) \in [\![1;n]\!]^2)$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$B = A - \sum_{i \neq j} a_{i,j} M_{i,j}$$
   est une matrice diagonale.
   (b) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice.
   (c) Conclure.

(4) Comment pourrait-on trouver d'autres telles bases ?

## Exercice 2 - Matrices de carré nul et de rang $r$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = r$. On note $(u_1, u_2, ..., u_r)$ une base de $\mathrm{Im}(A)$.

(1) Quelle est la dimension de Ker(A)?
(2) Montrer que Im(A) $\subset \mathrm{Ker}(A)$. En déduire que $n \geq 2r$.
(3) En déduire qu'il existe des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_{n-2r}$ tels que $(u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_{n-2r})$ forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

(4) Montrer qu'il existe une matrice $P$ inversible telle que

$$A = P \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1},$$

où $I_r$ désigne la matrice identité de taille $r$.

## Exercice 3 : réduction des endomorphismes anti-involutifs

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On considère un endomorphisme $f$ de $E$ tel que

$$f^2 = -\mathrm{Id}.$$

(1) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \emptyset$

(2) (a) Soit $u \in E$, $u \neq 0$. Montrer, par l'absurde, que la famille $(u, f(u))$ est libre.
(b) Montrer que le sous-espace $F_u = \mathrm{Vect}(u, f(u))$ est *stable* sous l'action de $f$, c'est à dire que

$$\forall x \in F_u,\ f(x) \in F_u.$$

(3) Dans cette question uniquement on considère le cas $n = 2$.
(a) Donner, en exhibant une matrice qui représenterait $f$ dans la base canonique, un exemple d'un tel endomorphisme.
(b) À l'aide de la question 2a, montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ présente des 0 sur la diagonale. Expliciter la matrice trouvée.

(4) On revient au cas général. On suppose[1] que $n = 2k$ est pair.
(a) On suppose qu'il existe, pour un certain $i \in [\![1; k-1]\!]$, des vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_i)$ tels que la famille

$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), ..., u_i, f(u_i))$$

est libre. Montrer qu'il existe un vecteur $u_{i+1}$ tel que la famille

$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), ..., u_i, f(u_i), u_{i+1}, f(u_{i+1}))$$

est encore libre.
(b) En déduire l'existence d'une base dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme

$$\begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

## Exercice 4 : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On considère un sous-espace $H$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $p = n^2 - 1$. (*Un tel sous-espace est appelé hyperplan.*) On note $(A_1, ...., A_p)$ une base de $H$ et $I_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le but est de montrer que $H$ contient au moins une matrice inversible. *On suppose donc que $H$ ne contient aucune matrice inversible.*

[1] En fait, il est possible de montrer que c'est nécessaire

(1) Montrer que $(A_1, A_2, ...., A_p, I_n)$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Soit $N$ une matrice nilpotente, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^{k-1} \neq 0$ et $N^k = 0$.
 (a) Quelles sont les valeurs propres de $N$? La matrice est-elle diagonalisable?
 (b) Montrer qu'il existe une matrice $B \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $N = B + \lambda I$.
 (c) Montrer que $\lambda$ est une valeur propre de $N$.
 (d) En déduire que $N \in H$ puis que $H$ contient toutes les matrices nilpotentes.

(3) Déterminer une matrice inversible qui s'écrive comme somme de deux matrices nilpotentes. Conclure.