ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Compléments Révisions

Semaine du 4 au 7 Avril

Un exercice d'analyse assez complet (Mardi 5 Avril)

(1) Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

(a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
(b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.
(d) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0,1[$.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
(b) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(c) En déduire que la fonction f est continue sur $[0,1[$.
(d) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.
(e) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$.

(3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$:

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right).$$

(a) Montrer, à l'aide de la question 2e, que pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right).$$

(b) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \leq 1.$$

(d) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(e) On note φ une densité et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Rappeler la formule définissant φ puis dresser le tableau de variation complet de Φ sur $\mathbb{R}$ en précisant la valeur de $\Phi(0)$.

(f) Montrer l'encadrement :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2}\right).$$

On pourra utiliser la question 3a puis effectuer le changement de variable $u = x\sqrt{n}$.

(g) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

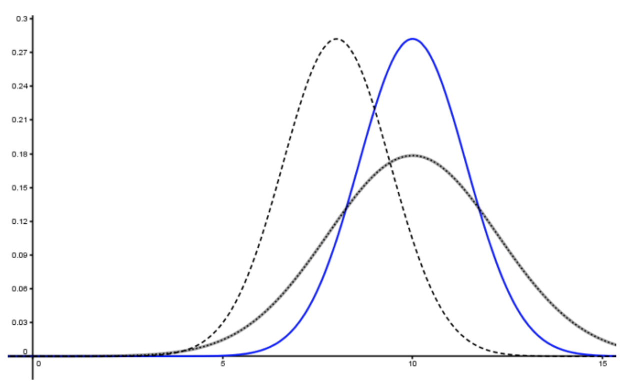
$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

(h) Écrire un programme en `SciLab` qui détermine une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$.

(i) Déterminer à présent par le calcul une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$. *On donne $50\pi \approx 157.08$.*

Autour de la loi normale (Mercredi 6 Avril)

Exercice 1. Les trois courbes suivantes sont celles des densités de trois lois normales $\mathcal{N}(10,2)$, $\mathcal{N}(10,5)$ et $\mathcal{N}(8,2)$. Associer à chaque courbe la loi normale correspondante.



Exercice 2. À l'aide d'un changement de variable affine, déterminer,en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}dt$.

(1) À l'aide d'un changement de variable affine, étudier la parité de f.o

(2) Trouver le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

(3) En encadrant e^{-t^2} pour $t > 1$, majorer $f(x)$ et en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini.

(4) Étudier les variations de f.

(5) Soit X une V.A.R. suivant une loi normale centrée d'écart type σ. Trouver $a > 0$ pour que $P(a \leq X \leq 2a)$ soit maximal.

Exercice 4. (Extrait de **EDHEC 2007**)

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires **à densité**, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1) E(Z_2).$$

On **admet** également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U prenant ses valeurs dans $\{-1; 1\}$ et telle que

$$P(U=1) = P(U=-1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

(1) (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}([U=1] \cap [X \leq x]) + \mathrm{P}([U=-1] \cap [X \geq -x]).$$

(b) En déduire que Y suit la même loi que X.

(2) (a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$.
(b) En déduire que $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

(3) (a) Rappeler la valeur de $E(X^2)$ et en déduire que

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}.$$

(b) Montrer, grace à une intégrationpar parties que, pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

(c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.
(d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E(X^4) = 3$.

(4) (a) Vérifier que $E(X^2 Y^2) = 3$.
(b) Déterminer $\operatorname{Cov}(X^2, Y^2)$.
(c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.
(d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variabales à densité. Lequel ?

Exercice 5. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \geq \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$.

Exercice 6. (*) On note Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

(1) Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$. On note Φ^{-1} sa bijection réciproque.
(2) Montrer que, pour tout $y \in]0;1[$, on a $\Phi^{-1}(1-y) = -\Phi^{-1}(y)$.
(3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}, \qquad x \to +\infty.$$

(4) En déduire que

$$\Phi^{-1}(y) \sim 2\ln\left(\frac{1}{1-y}\right), \qquad y \to 1.$$

Changements de base (Jeudi 7 Avril)

Exercice 7. (D'après **EML 2011**)

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Sans calcul, justifier que A est diagonalisable et non inversible. Déterminer le rang de A.

(2) Montrer que 0, 1 et 4 sont les trois valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.

(3) En déduire une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que : $A = PDP^{-1}$.

(4) Calculer P^{-1}.

(5) Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, telle que $\Delta^2 = D$, et déterminer Δ.

(6) On note $R = P\Delta P^{-1}$. Montrer $R^2 = A$ et calculer R.

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement A et R.
On note $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

(7) Déterminer les matrices de f et g dans la base $\mathcal{C}$.

(8) (a) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$.
(b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.

(9) (a) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(g)$.
(b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(g)$.

(10) Trouver au moins un automorphisme h de $\mathbb{R}^3$ tel que $g = f \circ h$.
(On déterminera h par sa matrice H dans la base $\mathcal{C}$, puis on exprimera la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide de H et de P.)

Exercice 8. (*) Soit f un endomorphisme **non nul** de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.

(1) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.
(2) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$