Chapitre 0. Révisions.

On propose, pour attaquer cette rentrée du meilleur pied, de consacrer les premières séances à des révisions - sous forme d'exercices accessibles pour tou.te.s - balayant (sans exhaustivité) le programme du cours de première année. Une partie de ces exercices pourra être reprise en *khôlle*.

1 Calculs

Exercice 1 (Récurrences)**.** Démontrer par récurrence les résultats suivants.

(1) Soient A, D et P trois matrices telles que : $A = PDP^{-1}$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

(2) Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad J^n = 4^{n-1}J$ où
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)! - 1.$$

(4) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \exp(x_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.

(5) Montrer que : $\quad \forall n \geq 3,\ n! \geq 2 \times 3^{n-2}$.

(6) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k} = \frac{a^{n+1} - (n+1)a + n}{(a-1)^2 a^n}, \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}.$$

(7) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Exercice 2 (Calculs de sommes)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

(2) Montrer que
$$\sum_{k=2}^{2n} k + 2^k = n(2n+1) + 2^{2n+1} - 5.$$

(3) Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{2^i}\right)^2=\frac{4^n-1}{3\cdot 4^{2n}}.$$

(4) Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3$.

(5) Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}2^k$.

(6) (a) Montrer que pour tout $k\in[\![1;n]\!]$: $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$ et si $n\geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=0$.

Exercice 3 (Séries usuelles)**.** Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)}{6^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{(n+1)!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n}{n!}$

2 Algèbre

Exercice 4 (Systèmes linéaires)**.**

(1) On considère le système linéaire suivant :
$$\begin{cases}(2+\lambda)x & + & 2y & - & z & =0\\ 2x & + & (\lambda-1)y & + & 2z & =0\\ -x & + & 2y & + & (2+\lambda)z & =0\end{cases}$$

(a) Résoudre ce système lorsque $\lambda=0$.
(b) Résoudre ce système lorsque $\lambda=3$.
(c) Résoudre ce système lorsque $\lambda=-3$.

(2) On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\-2&-2&5\end{pmatrix}$.

Résoudre les équations $AX=0$, $AX=X$ et $AX=3X$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(3) On considère la matrice $C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$.

Résoudre les équations $CX=0$, $CX=-X$ et $CX=3X$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

☞ *Pour les Questions (2) et (3), on pourra présenter les solutions sous formes de sous-espaces vectoriels engendrés par un nombre fini de vecteurs.*

Exercice 5 (Un extrait de **EDHEC 2019**)**.** On considère les matrices
$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&3&2\\1&-1&0\end{pmatrix},\quad\text{et}\quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(1) (a) Déterminer $(A-I)^2$.

(b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

(2) On pose $A = N + I$.
   (a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
   (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

Notion de déterminant de matrice 2×2

On rappelle[1] que pour des matrices 2×2 (**et des matrices** 2×2 **uniquement**), l'inversibilité est caractérisée par un *déterminant* non nul:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(M) \neq 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad ad - bc \neq 0.$$

Par exemple, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, on a

$$\det(A) = 2 \times (-4) - 1 \times 3 = -11 \neq 0$$

et A est inversible (ce qu'on aurait aussi naturellement pu trouver avec un pivot de Gauss).

Exercice 6. Déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3 Analyse

Exercice 7. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq 1 + x.$$

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
(2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer la dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$.
(3) La fonction est-elle dérivable en 0? Quelles en sont les conséquences graphiques?

Exercice 9. Que vaut

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ?$$

Exercice 10 (Une suite)**.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. On introduit la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$.

(1) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
(2) En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11 (Suite et série)**.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(1) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
(2) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.
(3) On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
    Calculer v_{n+1} en fonction de v_n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k = v_0 - v_{n+1}$
(4) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Exercice 12 (Intégrales)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x) \mathrm{d}x$$

[1] Bon, c'est peut être une nouveauté car elle n'est pas toujours abordée en premier année. En effet, cette notion est surtout utilisée dans le Chapitre *Fonctions de deux variables* de deuxième année

(1) (a) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$.
(b) Calculer I_0.
(2) (a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Établir que la suite (I_n) est décroissante.
(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
(3) (a) Justifier l'égalité : $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
(c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$
(4) (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

(b) Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+2}$$

et en déduire un encadrement de I_n.
(c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

4 Probabilités

Exercice 13. Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 et change d'état de la manière suivante:

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n+1$. On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume.

Déterminer la loi de X.

Exercice 14. Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui amène *Pile* avec la probabilité p, et *Face* avec la probabilité $1-p$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois *Pile*. On note X la variable aléatoire égale au nombre de *Face* obtenus au cours des lancers. On suppose que la variable X est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement *Pile-Pile*, alors $X = 0$, et si les lancers donnent successivement *Face-Pile-Face-Face-Pile*, alors $X = 3$.

(1) (a) Déterminer $P(X=0)$ et $P(X=1)$.
(b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire X.
(c) Vérifier que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1.$$

(2) Que peut-on dire de l'événement « on n'obtient jamais deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers de la pièce » ?
(3) Montrer que la variable X admet une espérance et la calculer.
(4) Compléter le script `SciLab` ci-dessous afin qu'il affiche une réalisation de la variable X

```
p=0.3;
S=0; n=0;
while S<2 do
    n=n+1;
    if ............  then
        S=S+1;
    end
end
disp(.............)
```

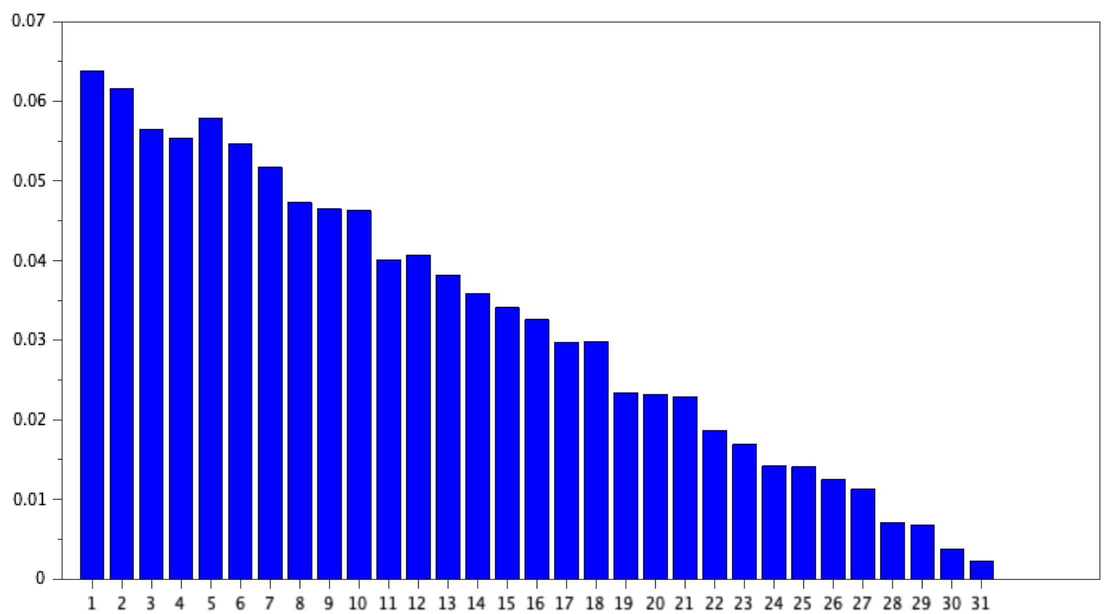
Exercice 15. Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (carreau et coeur), et on envisage le jeu suivant:
Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge.

(1) (`SciLab`).

(a) Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule la variable X.

```
function y=X(n)
    y=1
    T=2*n //nombre total de cartes à retourner
    while ...................
        y=...........
        T=...........
    end
endfunction
```

(b) Pour $n = 16$, on simule 1000 fois la variable X et on représente le diagramme à bâtons des fréquences obtenues pour chaque valeur, que l'on fait apparaître ci-dessous.



Donner une estimation graphique de $P(X = 1)$. Que vaut vraiment $P(X = 1)$?.
Donner des estimations de $P(X = 2), P(X = 3)$.

(2) Que vaut $X(\Omega)$?

(3) Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$,
$$P(X=k) = \frac{2n-k}{n\,(2n-1)}.$$
(4) Montrer que $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.

Exercice 16 (Densité)**.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

(1) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
On note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

(2) Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$

Exercice 17 (Densité)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\mathrm{d}t$.

(1) Calculer $I_0(x)$. En déduire que l'intégrale $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.
(2) Calculer $I_1(x)$. En déduire que l'intégrale $I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.
(3) À l'aide d'une intégration par parties, établir :
$$I_{n+1}(x) = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)I_n(x).$$
(4) En déduire, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$$
est convergente et que $I_n = n!$.
(5) Soit
$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}t^n e^{-t}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$
 (a) Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire à densité X_n.
 (b) Reconnaitre la loi de X_0 puis rappeler l'expression de sa fonction de répartition.
 (c) Sous quelle condition X_n admet-elle une espérance ? Montrer que X_n admet une espérance et que $E(X_n) = n+1$.

5 SciLab

Attention, la suite d'exercices et les instructions `SciLab` nécessaires à leur résolution ne constitue en aucun cas une liste exhaustive des compétences à maîtriser en informatique.

Exercice 18. (D'après **ECRICOME 2018**) On considère deux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
et on définit la suite matricielle (X_n) par
$$X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{et, pour tout } n \geq 0, \quad X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n.$$
(1) Écrire deux instructions permettant d'implémenter les matrices A et B.
(2) Compléter la fonction ci-dessous qui renvoie X_n où n est précisé en argument de celle-ci.

```
function res=X(n)
    Xold=...................
    Xnew=..................
    for i=..........
        Aux=................
        Xold=...............
        Xnew=.............
    end
        res=...............
endfunction
```

Expliquer comment fonctionne ce programme.

(3) Pour $n \geq 0$, on note α_n, β_n et γ_n les composantes de X_n.

(a) Que valent les termes des trois suites pour $n = 0$? Pour $n = 1$?
(b) Écrire une suite d'instructions qui permettent de représenter graphiquement les cent premier termes de chacune des trois suites.

Exercice 19. (D'après **EDHEC 2016**) On considère une suite (u_n) qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

(1) Compléter les commandes `SciLab` suivantes qui permettent de calculer et d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0;
while ...........
    n=...........
end
disp(n)
```

(2) Le Script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55, n = 70$ ou $n = 85$. En prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$, déterminer laquelle.

Exercice 20. (D'après **EML 2016**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(1) (*) Démontrer que (u_n) est croissante et converge vers 1.
(2) Écrire un programme sous `SciLab` qui calculer et affiche un entier N tel que

$$1 - u_N < 10^{-4}.$$

Exercice 21. (*D'après **EML 2015**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^x$.

(1) Montrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{f(n)}$. On note S sa somme.
(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

(3) En déduire l'écriture d'un programme sous `SciLab` qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-5} près.

Exercice 22. (D'après **EML 2017**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^x - e\ln(x)$ et la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(1) *Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.*
(2) Écrire un programme sous `SciLab` qui, étant donné un réel A rentré par l'utilisateur, calcule et affiche un entier naturel N tel que $u_n \geq A$.

Exercice 23. (*D'après **ECRICOME 2017**) Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n:

```
function y=T(n)
    S = ..........
    y = ..........
    while ..........
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S = S + tirage
        y = ..........
    end
endfunction
```

Exercice 24. (*D'après **EML 2015**) On considère une v.a. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et on introduit la v.a. V définie par

$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U),$$

où λ est un réel strictement positif.

(1) Montrer que $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
(2) En déduire l'écriture d'une fonction `SciLab`, notée `y=loi_expo(lambda)` qui, prenant en argument un paramètre `lambda` renvoie une simulation de la loi exponentielle $\mathcal{E}$(`lambda`).

Exercice 25. Un appartement est composé de 2 pièces (une chambre et un salon). La fenêtre du salon est ouverte. Une mouche se balade tranquille dans l'appartement en produit un bruit bien agaçant comme les mouches savent le faire. Au départ, elle se trouve dans le salon. À chaque seconde, la mouche se déplace selon le protocole suivant:

- Si elle est dans le salon, elle y reste avec probabilité 1/2, sort de l'appartement par la fenêtre avec probabilité 1/4 ou va faire un petit tour dans la chambre avec probabilité 1/4;
- Si elle est dans la chambre, elle y reste avec probabilité 3/4 ou retourne dans le salon avec probabilité 1/4;
- Une fois qu'elle est sortie, elle ne rentre plus et va embêter quelqu'un d'autre.

Écrire un programme `SciLab` qui, en fonction d'un entier n rentré par l'utilisateur, affiche où se trouve la mouche à l'intant n.