ECE 2 - Année 2021-2022
École Nationale de Commerce
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 0. Révisions. Éléments de solution

On propose quelques éléments de solution de certains exercices plus ou moins abordés en TD. On invite également à poser toute question relative aux exercices non présents ici par e-mail.

1 Calculs

Exercice 1.

(7) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

C'est une question qui apparait dans plusieurs exercices de concours[1]. On peut traiter la question avec une récurrence ou faire apparaître une somme télescopique. Dans les deux cas, ce qui fait tout marcher est la formule du **triangle de Pascal**[2], que l'on rappelle ici. Pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, m-1]\!]$,

$$\binom{m}{j} + \binom{m}{j+1} = \binom{m+1}{j+1}.$$

Comme l'exercice ici posé demandait de répondre à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n, on suit la consigne. On fera attention qu'il y a deux indices ici.

- <u>initialisation</u>. Pour $n = 0$ (et $p \in \mathbb{N}$ quelconque), le terme de gauche, défini par la somme, vaut

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{p+k}{k} = \binom{p+0}{0} = \binom{p}{0} = 1.$$

  D'autre part

$$\binom{p+0+1}{0} = \binom{p+1}{0} = 1,$$

  et l'initialisation est vérifiée.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n};$$

[1] J'ai en tête ECRICOME 2017, mais je sais qu'il y en a d'autres
[2] Il est important de savoir la démontrer, soit algébriquement soit avec un argument de dénombrement

Alors, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{p+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} + \binom{p+n+1}{n+1} \\ &= \binom{p+n+1}{n} + \binom{p+n+1}{n+1} \qquad \text{(par HR)} \\ &= \binom{p+n+2}{n+1} \qquad \text{(par triangle de Pascal)} \end{aligned}$$

C'est bien la relation au rang $n+1$ et la récurrence est terminée.

Exercice 2 (Calculs de sommes)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

(2) Montrer que

$$\sum_{k=2}^{2n} k + 2^k = n(2n+1) + 2^{2n+1} - 5.$$

(3) Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = \frac{4^n-1}{3 \cdot 4^{2n}}.$$

(4) Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3$.

(5) Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k$.

(6) (a) Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$: $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ et si $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = 0$.

Exercice 3 (Séries usuelles)**.** Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{6^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{n!}$

2 Analyse

Exercice 7. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq 1 + x.$$

Pour montrer ce type d'inégalité, une méthode usuelle est d'étudier la fonction définie par la différence des deux termes. Plus précisément, posons

$$h(x) = e^x - 1 - x.$$

La fonction h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison de telles fonctions usuelles. On a $h'(x) = e^x - 1$, ce qui nous permet de dresser sans la moindre difficulté le tableau de variations de h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) \geq 0$ ou encore $e^x \geq 1 + x$.

Exercice 9. Que vaut

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ?$$

Le piège serait de répondre 1. Car bien entendu, "1^∞" est une forme indéterminée ! Il faut donc revenir à une forme exponentielle et utiliser une limite usuelle ou, car on commence à parler de cela avec le Chapitre 1, un développement limité. Plus précisement,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

On peut alors dire que

$$\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

et par composition avec le logarithme,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = e.$$

Mais, on anticipe un peu sur ce qu'on va faire dans les séances de cours à venir. Comme $\frac{1}{n} \to 0$, on peut utiliser le développement limite en 0 (à l'ordre 1 qui suffit ici) de $\ln(1+u)$. On saura bientôt sur le bout des doigts que

$$\ln(1+u) = u + o(u), \qquad u \to 0.$$

Donc

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + o(1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par composition avec le log, on retrouve bien la limite précédente.

Exercice 10 (Une suite)**.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. On introduit la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$.

(1) On introduit une suite auxiliaire car la suite (u_n) n'est pas une suite *classique* pour laquelle le cours nous donnerait une méthode permettant d'obtenir immédiatement l'expression de son terme général. On regarde alors la suite (v_n), et on constate que

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2u_n}{3 \times 3^n} + \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{u_n}{3^n} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} v_n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

et la suite (v_n) est bien arithmético-géométrique.
Le cours (de première année, dont on se souvient comme si c'était hier), nous fournit une méthode

en plusieurs étapes pour obtenir l'expression du terme général de (v_n).

- Étape 1. On cherche le *point fixe* de la relation de récurrence, autrement dit une suite constante qui satisferait cette relation. Notons α cette quantité.
$$\alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \iff \alpha = 1.$$
- Étape 2. On voit[3] que $(v_n - \alpha)$ est géométrique de raison $2/3$. En effet,
$$v_{n+1} - \alpha = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(v_n - \alpha\right).$$
Ceci permet d'obtenir le terme général de $(v_n - \alpha)$. Observant que $v_0 = u_0/3^0 = 0$,
$$v_n - \alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^n (v_0 - \alpha) = -\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
- Étape 3. On revient à v_n.
$$v_n = v_n - \alpha + \alpha = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1.$$

(2) Comme on connait le terme général de v_n et le lien entre u_n et v_n, on peut conclure
$$v_n = \frac{u_n}{3^n} \iff u_n = 3^n \times v_n$$
et
$$u_n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 3^n - 2^n.$$

3 Probabilités

Exercice 11. Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 et change d'état de la manière suivante:

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$. On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume.

Commençons par observer que pour que $X = 1$ il faut que ce soit le spot 2 choisi aléatoirement parmi les 4 après que le spot 1 ait été allumé au moment $t = 0$.
Pour que $X = 2$, ou bien le spot 1 s'allume au hasard au moment $t = 1$ et le spot 2 s'allume au hasard au moment $t = 2$, ou bien le spot 3 s'allume choisi au hasard au moment $t = 1$ et nécessairement suit le spot 2. Ainsi de suite.
On comprend qu'il faut introduire une autre (suite de) variable(s) aléatoire(s). Notons N_k le numéro du spot allumé au moment k (pour $k \geq 1$). En particulier, on peut traduire l'énoncé par
$$\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}, \qquad P_{N_k=1}(N_{k+1} = j) = \frac{1}{4}$$
et
$$\forall j \in \{2, 3, 4\}, \qquad P_{N_k=j}(N_{k+1} = j - 1) = 1.$$

[3] Selon comment les questions apparaissent sur le sujet, on peut être amené à faire le détail ou à citer le résultat

On a $N(\Omega) = \{1,2,3,4\}$ et par conséquent $\{(N_k = 1),\ (N_k = 2),\ (N_k = 3),\ (N_k = 4)\}$ forme une système complet d'évènements. On peut donc utiliser la fameuse **formule des probabilités totales** avec ce s.c.e. On a

$$P(X=1) = P(N_1 = 2) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P_{N_1=1}(X=2)P(N_1=1) + P_{N_2=2}(X=2)P(N_1=2) + P_{N_1=3}(X=2)P(N_1=3) + \\ &\qquad + P_{N_1=4}(X=2)P(N_1=4) \qquad \text{(FPT)} \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Observons ensuite que, si le spot 1 est choisi au moment 1, c'est comme si on "recommençait à zéro", ce qui se traduit par

$$P_{N_1=1}(X=3) = P(X=2)$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} P(X=3) &= P_{N_1=1}(X=3)P(N_1=1) + P_{N_1=2}(X=3)P(N_1=2) + P_{N_1=3}(X=3)P(N_1=3) + \\ &\qquad + P_{N_1=4}(X=3)P(N_1=4) \qquad \text{(FPT)} \\ &= P(X=2)\times\frac{1}{4} + 0 + 0 + 1\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{21}{64}. \end{aligned}$$

Pour généraliser, si $(X = k)$, on peut avoir $k-1$ fois le spot 1 puis le spot 2, on peut avoir $k-2$ fois le spot 1 puis le spot 3 puis le spot 2 ou $k-3$ le spot 1, puis le spot 4 puis le spot 3 puis le spot 2. Pour $k \geq 4$,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}(N_j=1)\cap(N_j=2)\right) + P\left(\bigcap_{j=1}^{k-2}(N_j=1)\cap(N_{k-1}=3)\cap(N_k=2)\right) \\ &\qquad + P\left(\bigcap_{j=1}^{k-3}(N_j=1)\cap(N_{k-2}=4)\cap(N_{k-1}=3)\cap N_k=2\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} \\ &= \frac{21}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} \end{aligned}$$

Exercice 13.

(1) (a) À chaque nouvelle pioche (tant qu'on a pas pioché de roi rouge), la probabilité de tirer un roi rouge correspond à 2 (nombre de rois rouges toujours disponible) divisé par le nombre de cartes **restantes** dans la pioche, nombre qui diminue après chaque pioche infructueuse.

```
function y=X(n)
    y=1 //au moins une pioche est nécessaire
    T=2*n //nombre total de cartes à retourner
    while rand( ) > 2/T //tant qu'on ne pioche pas un roi rouge
        y=y+1 // il faudra une pioche de plus
        T=T-1 // il y aura une carte de moins dans la pioche
    end
endfunction
```

(2) On peut avoir au mieux un roi rouge au premier tirage et au pire, à la fin il ne reste que les deux rois rouges, donc on aura d'abord pioché les $2n-2$ "mauvaises cartes" et le premier roi rouge arrivera au $(2n-1)-$ième tirage. Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles. Donc

$$X(\Omega) = [\![1; 2n-1]\!].$$

(3) Si le premier roi rouge arrive avec la k-ième pioche, les $(k-1)$ premières pioches ont donné chacune une mauvaise carte. On introduit les évènements R_j "la $j-$ième pioche donne un roi rouge. Attention, les tirages sont sans remise et donc non indépendants. Il faut utiliser la **formule des probabilités composées**, c'est à dire conditionner successivement par ce qui se passe jusqu'à la fin. On a

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P\left(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \ldots \cap \overline{R}_{k-2} \cap \overline{R}_{k-1} \cap R_k\right) \\
&= P(\overline{R}_1)P_{\overline{R}_1}(\overline{R}_2) \times \ldots \times P_{\bigcap_{j=1}^{k-3}\overline{R}_j}(\overline{R}_{k-2}) \times P_{\bigcap_{j=1}^{k-2}\overline{R}_j}(\overline{R}_{k-1})P_{\bigcap_{j=1}^{k-1}\overline{R}_j}(R_k) \\
&= \frac{\cancel{2n-2}}{2n} \times \frac{\cancel{2n-3}}{2n-1} \times \frac{\cancel{2n-4}}{\cancel{2n-2}} \times \ldots \times \frac{2n-2-(k-3)}{\cancel{2n-(k-3)}} \times \frac{2n-2-(k-2)}{\cancel{2n-(k-2)}} \times \frac{2}{2n-(k-1)} \\
&= \frac{2(2n-k+1)(2n-k)}{2n(2n-1)(2n-k+1)} \qquad \text{(par télescopage)} \\
&= \frac{2n-k}{n(2n-1)},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue. Ouf! Pas si facile!

(4) C'est un calcul de somme avec les formules du cours de première année. Même si on a pas su faire la question précédente, on invite à quand même essayer de faire celle-ci en admettant alors la formule nécessaire.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{2n-1} k \times \frac{2n-k}{n(2n-1)} \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} \left(2nk - k^2\right) \\
&= \frac{2n}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k - \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k^2 \\
&= \frac{\cancel{2n}}{\cancel{n(2n-1)}} \times \frac{\cancel{(2n-1)}(2n)}{\cancel{2}} - \frac{1}{\cancel{n(2n-1)}} \times \frac{\cancel{(2n-1)}2\cancel{n}(2(2n-1)+1)}{6} \\
&= 2n - \frac{4n-1}{3} \\
&= \frac{2n+1}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 14 (Densité)**.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

(1) On vérifie que f est bien une densité de probabilité.

- f est bien positive ou nulle. En effet, sur $]-\infty, 0[$, elle est nulle et sur $[0; +\infty[$, elle est produit de quantités positives ou nulles.

- f est continue (partout); sur $]-\infty; 0[$ comme fonction constante, et sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles continues. Elle est même continue en 0 alors que ce n'est pas une condition nécessaire ici.

- Il reste à vérifier que l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$
converge et vaut 1. Comme f est nulle sur $]-\infty;0[$, on se ramène à l'intégrale entre 0 et $+\infty$. Soit $A \geq 0$. On procède par IPP, en posant
$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & e^{-t} \\ v(t) & = & t \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & -e^{-t} \\ v(t) & = & 1 \end{array}\right.$$
Les deux fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;A]$ rendant l'IPP licite et permettant d'écrire
$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^A te^{-t}\mathrm{d}t & = & [-te^{-t}]_0^A + \displaystyle\int_0^A e^{-t}\mathrm{d}t \\ & = & -Ae^{-A} + [-e^{-t}]_0^A \\ & = & -Ae^{-A} - e^{-A} + 1 \\ & \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} & 1, \end{array}$$
par croissance comparée. On a bien le résultat voulu, f est une densité de probabilité.

(2) La fonction de répartition est donnée par
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$
Comme f est nulle sur $]-\infty;0[$, on a, pour $x < 0$
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0.$$
Pour $x \geq 0$, c'est un calcul déjà fait plus haut
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x te^{-t}\mathrm{d}t = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 - (x+1)e^{-x}.$$
On a bien
$$F(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{array}\right.$$