Exercices Chapitre 1. Éléments de solutions

Exercice 102. Pour la (i), comme on ne peut pas composer les équivalents, on obtient "à la main" par factorisation un équivalent du numérateur.

$$\ln\left(e^{2x}-1\right)=\ln\left(e^{2x}(1-e^{-2x})\right)=\ln\left(e^{2x}\right)+\ln(1-e^{-2x})=2x+o(x), x\to+\infty$$

Ainsi, en raisonnant par croissance comparée pour le dénominateur, en $+\infty$, on a

$$\frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{x-\ln(x)+2}\sim\frac{2x}{x}=2\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}2.$$

Pour la (ii), il faut encore factoriser dans le ln puis remarquer qu'on peut utiliser les DL de $\ln(1+u)$ en 0 (avec $u=2/n\to 0, n\to+\infty$) et de $\sqrt{1+v}$ en 0 avec $v=1/n^2\to 0, n\to+\infty$). Comme

$$\ln(n+2)-\ln(n)=\ln(n(1+2/n))-\ln(n)=\ln(n)+\ln(1+2/n)-\ln(n)=\ln(2/n)\sim\frac{2}{n}$$

et

$$\sqrt{1+1/n^2}\sim 1,$$

on a

$$\frac{\ln(n+2)-\ln(n)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\sim\frac{2}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Enfin, pour la (iii), on sait que $e^u-1\sim u$ pour $u\to 0$. On prend ici $u=x^2\pm to0;\ x\to 0$ ce qui donne

$$\frac{e^{x^2}-1}{x+x^2}\sim\frac{x^2}{x}=x\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Exercice 103. On essaie de calculer la limite du quotient des deux quantités à comparer. Remarquons (même si ici ce n'est pas nécessaire pour obtenir la limite désirée) que, comme

$$e^{-x^2/2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

on a

$$\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5\underset{x\to+\infty}{\sim}-5e^{-x^2/2}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}e^x}}{e^{-2x}\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5} &= \frac{1}{e^{-3x}\sqrt{x}\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5}\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{5\sqrt{x}e^{-x^2/2-3x}}\\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,\end{aligned}$$

par croissance comparée. Il suit que l'inverse de ce quotient tend vers 0, ce qui donne

$$e^{-2x}\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5 = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}e^x}\right), \qquad x \to +\infty.$$

Exercice 104. (Extrait **DS n°1**, 2020-2021)

(1) On rappelle les deux développements limités usuels en 0 (à l'ordre 2)

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2).$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
(i)\ \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{1 + x + x^2/2 + o(x^2) + 1 - x + x^2/2 + o(x^2)}{2} \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
(ii)\ \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} &= 1 + x - \frac{(2x)^2}{8} + o(x^2) + 1 - x - \frac{(-2x)^2}{8} + o(x^2) \\
&= 2 - x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

(2) On peut alors écrire que

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}-2} &= \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{-x^2 + o(x^2)} \\
&= \frac{x^2/2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} \qquad (\text{car } \ln(1+u) = u + o(u),\ u \to 0) \\
&= \frac{1/2 + o(1)}{-1 + o(1)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 108. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Pour montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, il y a deux étapes. Ce qui se passe au *point de raccordement* (en 0), qu'on fait "à la main" et ce qui se passe ailleurs.

- En dehors de 0, f est quotient de combinaisons de fonctions usuelles (polynomiale, exponentielle) continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

- En 0, il faut vérifier que $f(x) \to f(0) = 1$. On sait que $e^{-x} - 1 \sim -x$ en 0 et que $e^{-x} \sim 1$. Ainsi,

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} \sim \frac{x}{x} = 1 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 = f(0)$$

donc f est bien continue en 0. Au final f est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) La dérivabilité en 0 se montre *via* l'existence d'une limite finie pour le taux d'accroissement en 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} - 1}{x} = \frac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$$

Pour lever l'indéterminée de cette limite, on remplace e^{-x} par son *approximation polynomiale* au voisinage de 0, c'est à dire pour son développement limité en 0 (à l'ordre 2). On rappelle que

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad x \to 0.$$

Il suit que,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x(1 - e^{-x})} \\
&= \frac{x(1 - x + x^2/2 + o(x^2)) - 1 + 1 - x + x^2/2 + o(x^2)}{x(1 - 1 + x - x^2/2 + o(x^2))} \\
&= \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-1/2 + o(1)}{1 + o(1)} \\
&\underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1/2$.

(3) En dehors de 0, comme précédemment, f est quotient de fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ (combiné avec la question précédente, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ par contre on ne sait pas si elle est $\mathcal{C}^1$ car on ne sait pas si f' est continue en 0. Ce n'est pas demandé, mais si c'était le cas, il faudrait regarder à la main si $f'(x) \to f'(0) = -1/2$ encore avec des DL sur l'expression de la dérivée qu'on va obtenir ci-après). Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{(e^{-x} - xe^{-x})(1 - e^{-x}) - xe^{-x}e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}(1 - e^{-x} - x)}{(1 - e^{-x})^2}$$

La dérivée est alors du signe de $1 - e^{-x} - x$. La question suivante va nous aider.

(4) La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est convexe (elle est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est strictement positive). Ainsi, sa courbe de trouve au dessus de toutes ses tangentes, en particulier celle en 0 d'équation $y = 1 - x$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-x} \geq 1 - x.$$

On pouvait naturellement montrer ce résultat en étudiant les variations (et les extremums) de la fonction $x \mapsto e^{-x} - 1 + x$.

(5) La question précédente permet d'affirmer que $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Et donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Pour les limites en $\pm\infty$ on a

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{xe^{-x}}{1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée. Et

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} \underset{x \to -\infty}{\sim} \frac{xe^{-x}}{-e^{-x}} = -x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

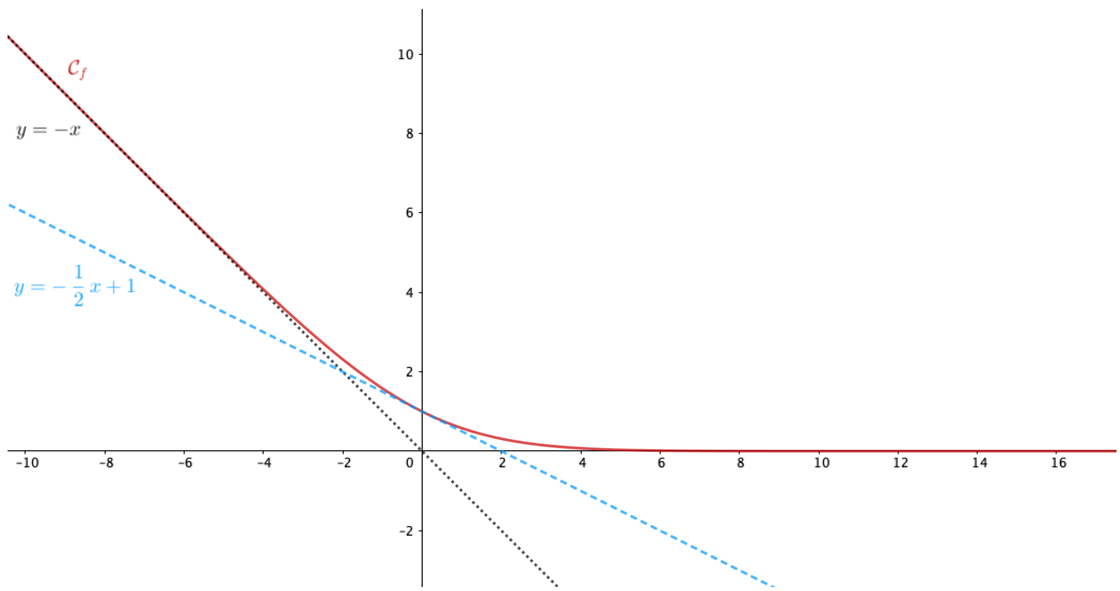
On peut alors dresser le tableau complet des variations de f:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$+\infty$ $\searrow$ 0

Pour la courbe, on fait apparaître la tangente en 0 (qui traduit la dérivabilité précédemment montrée). On a vu que $f(x) \sim -x$ en $-\infty$. On regarde si $y = -x$ est asymptote oblique

$$f(x) - (-x) = f(x) + x = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} + x = \frac{xe^{-x} + x - xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{1 - e^{-x}} \sim \frac{x}{-e^{-x}} = -xe^{x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc l'écart entre $f(x)$ et $-x$ tend vers 0, $y = -x$ est bien asymptote (oblique) à la courbe en $-\infty$.



Exercice 109. Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

(1) D'après le cours, on sait que, au voisinage de 0

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Il suit que

$$f(x) = \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) - 1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + o(x),$$

ce qui est bien le DL à l'odre 1 de f en 0.

(2) La fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0. Elle peut donc être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 1/2$. De plus, toujours grâce au DL précédent, ce prolongement est dérivable en 0 et $f'(0) = -1/8$.

(3) C'est la partie principale du DL précédent. La tangente en 0 à f est alors $y = -(1/8)x + 1/2$.

Exercice 117. (Extrait de **DS n°1**, 2020-2021) On définit les fonctions ch et sh par

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Cet exercice est inspiré par un exercice du sujet **ISC 1999**.
La correction proposée ici reprend un ordre de questions différent de celui du polycopié et plus complet, on renvoie au sujet du DS (dans les archives) dont il extrait. On pourra cliquer ici.

On considère la fonction f et la suite (u_n) définies par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}, \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & \geq & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array} \right.$$

(1) **Étude de** f.

(a) De la présence de la racine, on peut affirmer que f est définie et continue sur $[-1;+\infty[$. En revanche, elle n'est dérivable que sur $]-1;+\infty[$ (la fonction racine n'est pas dérivable en 0 et sa courbe admet alors une semi-tangente verticale). En $+\infty$, il est clair que

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{x}{2}} \longrightarrow +\infty$$

et comme $\frac{f(x)}{x} \to 0$, la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction horizontale.

(b) On peut utiliser au choix la formule de Taylor-Young ou bien le DL usuel de $\sqrt{1+u}$ en 0. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+x}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{16}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

En particulier, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 a pour équation

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x$$

et on peut même ajouter que (localement), $\mathcal{C}_f$ sera au dessous de celle-ci.

(c) Pour $x > -1$, on a

$$f'(x) = \frac{1/2}{2\sqrt{\frac{x+1}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}} > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ (et en fait sur $[-1;+\infty[$ par continuité), ce qu'on résume dans le tableau suivant

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

(d) On résout

$$\begin{aligned}
f(x)=x \iff & \sqrt{\frac{x+1}{2}}=x \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ \frac{x+1}{2} & = & x^2 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ 2x^2-x-1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ x & = & \frac{1\pm 3}{4} \end{array}\right. \\
\iff & x=1.
\end{aligned}$$

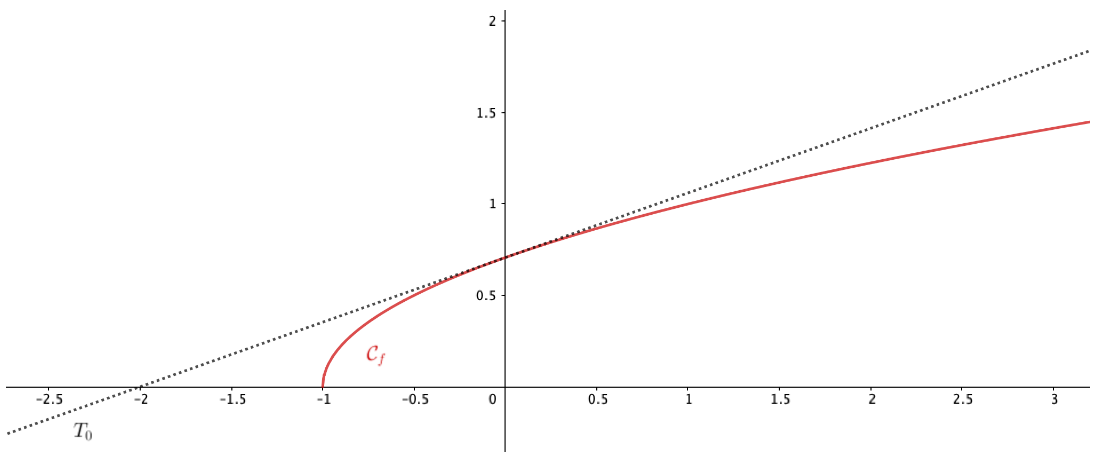
Pour l'inéquation on remarque qu'elle est automatiquement vérifiée si $x\in[-1;0]$. Pour $x\geq 0$, la bijectivité de $t\mapsto t^2$ donne

$$\begin{aligned}
f(x)>x \iff & \sqrt{\frac{x+1}{2}}>x \\
\iff & -1\leq x<0 \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ \frac{x+1}{2} & > & x^2 \end{array}\right. \\
\iff & -1\leq x<0 \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ 2x^2-x-1 & < & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$-1\leq x<0 \quad \text{ou} \quad 0\leq x<1$

$$\iff x\in[-1;1]$$

(e) On représente la courbe et la tangente en 0



(2) **Dans cette question** on suppose que $u_0=0$.

(a) Vérifier que (u_n) est bien définie revient à montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on peut calculer u_{n+1} à partir de u_n car u_n est dans l'ensemble de définition de f. On procède par récurrence.

- <u>initialisation</u>. Pour $n=0$, u_0 existe et $u_0\geq -1$.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n\in\mathbb{N}$, u_n existe et que $u_n\geq -1$. Alors, u_n est dans l'ensemble de définition de f et $u_{n+1}=f(u_n)$ existe. De plus,

$$u_n\geq -1 \Rightarrow \frac{u_n+1}{2}\geq 0 \Rightarrow u_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}\geq 0\geq -1$$

(plus généralement, c'est la croissance de f qu'on utilise; $u_n\geq -1\Rightarrow u_{n+1}=f(u_n)\geq f(-1)=0$) ce qui termine la récurrence.

(b) Commençons par montrer que la suite est majorée par 1. C'est encore une récurrence, que l'on rédige ici un peu plus succinctement que la précédente. $u_0 = 0 \leq 1$. Et si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$, alors, par croissance de f

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq f(1) = 1$$

ce qui termine cette courte récurrence. Mais alors, tous les termes de la suite sont dans $[-1; 1]$ et on peut utiliser le signe de $f(x) - x$. Plus précisément,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

Or, pour tout $x \in [-1; 1]$, on a $f(x) \geq x$. Avec $x = u_n$, on a donc $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Par le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers un réel, que l'on note ℓ et qui vérifie, par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et grâce à la continuité de f,

$$\ell = f(\ell)$$

équation déjà résolue ci-avant et qui donne $\ell = 1$.

(3) Dans **toute la suite de l'exercice** on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Comme précédemment, on montre par récurrence que u_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et même que $u_n > 1$. C'est exactement la même chose que dans la partie précédente, cela repose sur la (stricte) croissance de f et le fait que $f(1) = 1$. On omet les détails ici.

(b) Tous les termes de la suite vérifient $u_n > 1$ donc $u_n \in]1; +\infty[$ intervalle dans lequel on a $f(x) < x$ ou encore $f(u_n) < u_n$ ce qui donne que (u_n) est cette fois décroissante.

(c) La suite étant décroissante et minorée par 1, le théorème de convergence monotone affirme qu'elle converge vers une certaine limite ℓ, toujours solution de $f(\ell) = \ell$, donc nécessairement égale à 1.

(4) **Étude de fonctions auxiliaires.** On définit les fonctions ch et sh par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Les deux fonctions ch et sh sont, comme combinaisons linéaires d'exponentielles, dérivables sur $\mathbb{R}$ et il est immédiat qu'on a

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x), \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).$$

Une somme de deux exponentielles étant strictement positive, il est aussi clair que $\mathrm{ch}(x) > 0$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathrm{sh}(0) = 0$ et $\mathrm{ch}(0) = 1$, on en déduit les tableaux de variations suivants

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$			$+$				
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$			$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$		$-$	0		$+$		
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	u_0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) La fonction ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; elle réalise donc une bijection, par le théorème de bijection, de $\mathbb{R}_+$ sur $[1;+\infty[$. En particulier, comme $u_0 > 1$, ce dernier admet un unique antécédent, noté α, par ch ou encore, il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\mathrm{ch}(\alpha) = u_0$.

(c) (i) Ce programme donne une approximation à 10^{-3} près de α lorsque $u_0 = 3/2$, c'est un programme de recherche de solution par *dichotomie* (on découpe l'intervalle de recherche en deux à chaque étape et on continue à chercher dans la moitié qui contient la solution).

(ii) On cherche la solution entre 0 et 2 car $\mathrm{ch}(2) = (e^2 + e^{-2})/2 > e^2/2 > 3/2$, donc on sait déjà que $\alpha \in [0;2]$.

(5) (a) C'est un simple calcul...

$$\begin{aligned} 2\left(\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 &= 2\left(\frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{2}\right)^2 - 1 \\ &= 2\frac{e^x + 2 + e^{-x}}{4} - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \mathrm{ch}(x), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) C'est une récurrence.

- initialisation. Pour $n = 0$, on a bien

$$\mathrm{ch}(\alpha) = u_0$$

par définition de α précédemment.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$. Remarquons qu'on peut reformuler la question (5)(a) comme

$$\frac{\mathrm{ch}(x) + 1}{2} = \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} && \text{(par définition)} \\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)+1}{2}} && \text{(par HR)} \\ &= \sqrt{\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha/2^n}{2}\right)^2} && \text{(par(5)}(a)\text{)} \\ &= \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right), \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

(c) C'est encore un calcul facile

$$2\left(\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2+1 = 2\left(\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{2}\right)^2 = 2\frac{e^x+e^{-x}-2}{4}+1 = \mathrm{ch}(x).$$

(d) D'après ce qui précède, $\mathrm{sh}'(0) = \mathrm{ch}(0) = 1$.

(e) La formule de Taylor-Young fournit alors le DL en 0 à l'ordre 1 (ou 2) (les fonctions sont bien $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0)

$$\mathrm{sh}(x) = \mathrm{sh}(0) + sh'(0)x + o(x) = x + o(x), \qquad \mathrm{sh}(x) \sim x$$

et

$$\mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(0)+\mathrm{ch}'(0)x+\frac{\mathrm{ch}''(0)}{2}x^2+o(x^2) = 1+\mathrm{sh}(0)x+\frac{\mathrm{sh}'(0)}{2}x^2+o(x^2) = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2), \qquad \mathrm{ch}(x)-1 \sim \frac{x^2}{2}.$$

(f) D'après tout ce qui précède, on a (comme $\alpha/2^n \to 0,\ n \to +\infty$)

$$u_n - 1 = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - 1 \sim \frac{1}{2} \times \left(\frac{\alpha}{2^n}\right)^2,\ n \to +\infty$$

ou encore

$$u_n - 1 \sim \frac{\alpha^2}{2^{2n+1}},\ n \to +\infty.$$