ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 3. Pour en finir avec les suites récurrentes & implicites.

1 Avant-propos

Ce chapitre présente et essaie de synthétiser les étapes et les éléments d'étude des suites récurrentes et implicites.

Contrairement aux suites classiques (arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2...) pour lesquelles il est capital de savoir déterminer le terme général (on renvoie au cours de première année), l'objet de l'étude d'une telle suite est plutôt de déterminer les variations de la suite et son *comportement asymptotique* (convergence, recherche d'un équivalent...).

Ce cours reprend la marche à suivre classique de l'étude; il permettra de comprendre la structure des problèmes classiques de concours dans lesquelles les étapes peuvent être plus ou moins découpées et sont naturellement **toutes à redémontrer**.

2 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

☞ Dans les problèmes où apparaissent des études de suites récurrentes, l'étude de la fonction f fait quasiment toujours l'objet d'une première partie. On y montre des propriétés (continuité, dérivabilité, monotonie, recherche du point fixe, ...) qui sont bien sûr à utiliser dans la ou les parties qui suivent.

2.1 (Bonne) Définition d'une suite récurrente

Il apparait très vite que le mode de génération des termes d'une suite par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ peut vite poser problème si, *au bout d'un moment*, un des termes générés se trouve en dehors du domaine de définition de f (dans le cas où celui-ci ne serait pas $\mathbb{R}$ tout entier), empêchant ainsi de poursuivre le processus.

☞ Souvent, on montre par récurrence que (u_n) est bien définie notamment en montrant simultanément que ses termes se trouvent tous dans un intervalle inclus dans le domaine de définition de f.

Tout se passe bien lorsque l'on travaille sur un intervalle I *stable* sous l'action de f, et qu'on y prend le premier terme de la suite.

Proposition 1. Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}$ et $u_0 \in I$. Si I est *stable sous l'action de* f, c'est à dire si $\forall x \in I,\ f(x) \in I$, alors la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de plus, $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☞ La preuve est une récurrence facile qu'il faut savoir (re)faire sans hésitation.

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

2.2 Obtenir un terme de rang quelconque avec `SciLab`

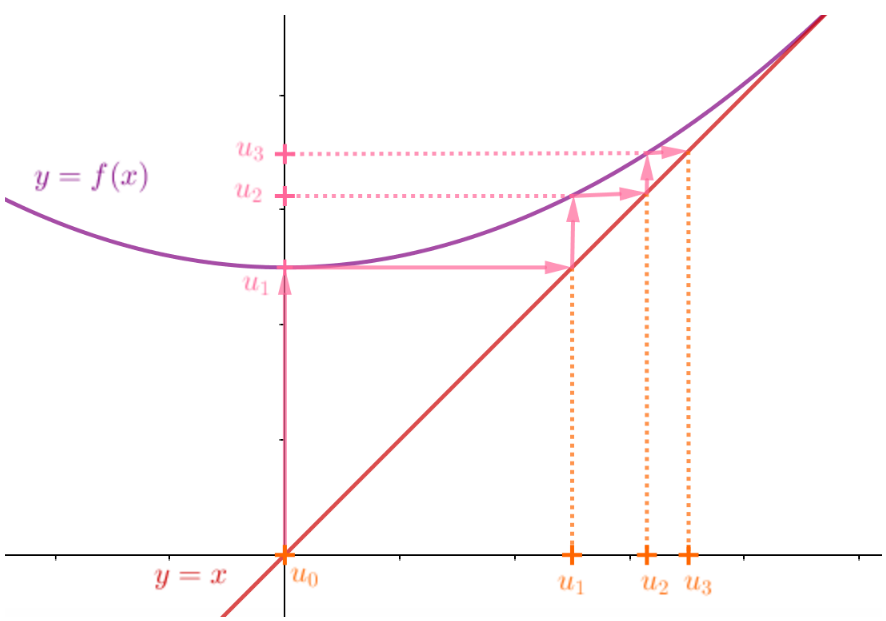
Écrire un programme ou une fonction sous `SciLab` permettant de renvoyer le terme u_n d'une suite récurrente, où n est entré par l'utilisateur ou en argument de la fonction est une question classique, dont la réponse est facile.

```
function u=suite(n)
    u=....... //initialisation : premier terme de la suite
    for k=1:n
        u=f(u) //où f est déjà définie ou bien remplacée directement par son
expression
    end
endfunction
```

☞ Un autre type de programme fréquemment demandé est celui visant à calculer et afficher le premier entier n tel que u_n satisfasse une certaine condition (souvent d'écart à la limite). On y revient ci-après.

2.3 Représentation graphique

Ci-dessous, l'exemple de représentation *en escalier* de la suite récurrente $u_{n+1} = (u_n^2 + 1)/2$, avec $u_0 = 0$.



2.4 Variations d'une suite récurrente

☠ ☠ ☠ Il devient, à ce stade, passible de la peine capitale d'écrire que la suite (u_n) suit les mêmes variations que la fonction f.

☞ Une fonction f croissante (sur l'intervalle où vivent les termes) va permettre de générer une suite **monotone** mais qui peut être décroissante.

L'étude de la monotonie peut se faire par deux méthodes.

✏ **Méthode 1:** Par récurrence avec la croissance de f.

Cette méthode nécessite d'être en mesure de calculer les deux premiers termes de la suite, ce qui n'est pas toujours le cas si par exemple u_0 est donné arbitraire dans un certain intervalle (voir Exercice 2 du **DS n°1**).

Proposition 2. Soient (u_n) une suite récurrente, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f croissante sur I et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Alors,

(i) Si $u_0 \leq u_1$, (u_n) est croissante;
(ii) Si $u_0 \geq u_1$, (u_n) est décroissante.

☞ Ainsi, la comparaison des deux premiers termes permet de conclure au sens de monotonie de la suite.

Exercice 2. Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.
(2) Montrer que (u_n) est croissante.

☞ Si la fonction f est **décroissante** (sur l'intervalle où vivent les termes de la suite) la suite (u_n) **n'est plus monotone**. On peut en revanche montrer par la même méthode que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) le sont. En comparant u_0 et u_2 pour la première, et u_1 et u_3 pour la seconde, on a le sens de chacune. Ceci repose sur l'observation que $g = f \circ f$ est dans ce cas croissante et que $u_{2(n+1)} = g(u_{2n})$.

Exercice 3. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \in [1; 3]$.
(2) Calculer u_1, u_2, u_3. La suite (u_n) est-elle monotone?
(3) Montrer que (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante.
On pourra montrer que $u_{2(n+1)} = g(u_{2n})$, où $g = f \circ f$ est croissante.

✏ **Méthode 2:** Avec le signe de $f(x) - x$.

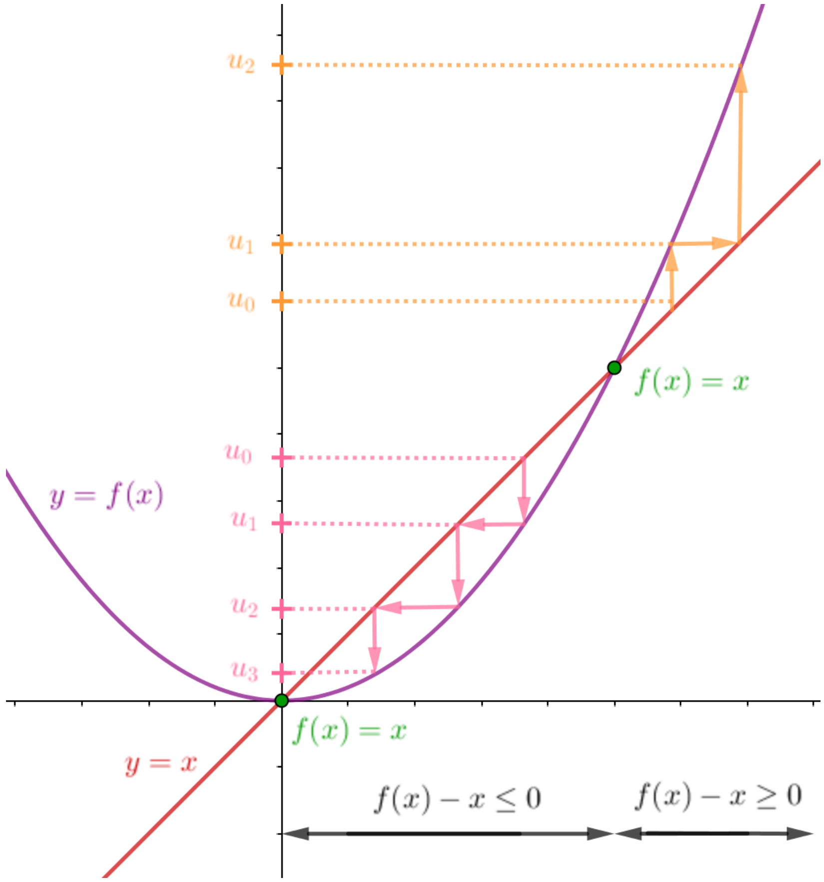
Observant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, connaître le signe de $f(x) - x$ permet tout de suite, (en évaluant donc en $x = u_n$) de connaître les variations de la suite, si bien sûr on sait que **tous les termes de la suite de situent dans un intervalle où le signe de $f(x) - x$ est constant**.

Plus précisément, on a le résultat suivant, dont la preuve est immédiate.

Proposition 3. Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors,

(i) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et si $f(x) - x \geq 0$ pour $x \in I$, alors (u_n) est croissante.
(ii) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et si $f(x) - x \leq 0$ pour $x \in I$, alors (u_n) est décroissante.

☞ Si le signe de $f(x) - x$ varie, c'est la position de u_0 par rapport au(x) *point(s) fixe(s)* qui détermine le sens de variation de (u_n). Dans l'exemple ci-dessous, on considère $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec $f(x) = x^2$) dans deux cas: $u_0 \in [0; 1]$ et $u_0 \in [1; 2]$.



2.5 Point fixe: candidat éventuel pour une limite finie

En déterminant le signe de $f(x) - x$ dans la méthode précédente, on résout notamment l'équation de point fixe $f(x) = x$, dont les solutions donnent les *candidats* pour une limite finie **éventuelle**.

☠ L'existence des points fixes de f ne garantit en aucun cas la convergence de la suite (u_n), il faut un argument supplémentaire (bien souvent le *théorème de convergence monotone*) pour montrer la convergence et ensuite choisir le *bon point fixe* comme valeur pour cette limite.

Proposition 4. Soit (u_n) une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, si f est **continue** sur I, **et si** (u_n) est convergente, alors sa limite ℓ est un point fixe de I.

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \downarrow & {\scriptstyle n \to +\infty} & \downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

☞ Il est capital que la fonction f soit continue sur tout l'intervalle **fermé** pour pouvoir passer à la limite dans la relation de récurrence (ce qui explique qu'on étudie avec intérêt la régularité de la fonction).

2.6 Critère de convergence: convergence monotone

Pour garantir la convergence de la suite dans le cas où la fonction f est croissante (et avec une suite bornée), on utilise le théorème de convergence monotone affirmant que toute suite croissante majorée (ou toute suite décroissante minorée) est convergente.

☠ Attention la convergence monotone ne donne pas la valeur de limite qui n'est souvent pas le majorant (ou le minorant) qu'on a utilisé. On évitera les conclusions hâtives.

Théorème 1. *Soit (u_n) une suite. Alors,*

(i) Si (u_n) est croissante et majorée, elle est convergente.
(ii) Si (u_n) est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.
(iii) Si (u_n) est décroissante et minorée, elle est convergente.
(iv) Si (u_n) est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$.

☞ On utilise aussi ce théorème pour des démonstrations par l'absurde.
En effet, il est difficile de montrer par exemple qu'une suite n'est pas majorée. Ce qu'on fait donc est qu'on suppose qu'elle l'est, lorsqu'on sait que la suite est croissante, pour déduire la convergence et aboutir à une contradiction (par exemple s'il n'y a pas de point fixe dans l'intervalle où vivent les termes de la suite).

Exercice 4. Montrer que la suite de l'Exercice 2 converge vers une limite ℓ à préciser.

☞ Dans le cas où f est décroissante, on peut être amené à appliquer le théorème de convergence monotone aux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Si celles-ci convergent vers une même limite, alors il en est de même pour (u_n).

Exercice 5. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) de l'Exercice 3 convergent et préciser leurs limites respectives. Conclure.

2.7 Utilisation de l'IAF

Lorsque la suite n'est pas monotone (mais pas seulement dans ce cas), l'utilisation de l'*inégalité des accroissements finis* (IAF) peut permettre d'obtenir des estimations des **écarts successifs** entre les termes de la suite et le candidat limite (aussi point fixe de f).
Une récurrence permet ensuite d'obtenir un encadrement donnant la conclusion souhaitée (la convergence) par application du théorème des gendarmes.
Cette méthode donne même une indication sur la vitesse de convergence, qui est alors plus rapide qu'une convergence géométrique (ce qui est rapide).

Proposition 5. Soient (u_n) une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et I un intervalle tels que

(i) Pour tout n, $u_n \in I$;
(ii) Il existe $\ell \in I$, tel que $f(\ell) = \ell$;
(iii) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$,
$$|f'(x)| \leq k,$$
où $0 < k < 1$. (*On dit que f est contractante.*)

Alors, (u_n) converge vers ℓ.

☞ L'IAF appliquée à f sur I (et il est donc capital de savoir que f est bien $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle où vivent les termes de la suite ainsi que le point fixe candidat) permet d'obtenir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|,$$
ce qui permet donne par une récurrence immédiate l'estimation
$$|u_n - \ell| \leq k^n|u_0 - \ell| \qquad (\star)$$
ou encore
$$\begin{array}{ccccc} \ell - k^n|u_0 - \ell| & \leq & u_n & \leq & \ell + k^n|u_0 - \ell| \\ \searrow & & \downarrow & & \swarrow \\ & & \ell & & \end{array}$$
Le fait que $0 < k < 1$ est alors capital pour avoir $k^n \to 0$, $n \to +\infty$ et pouvoir appliquer le théorème des gendarmes pour conclure à la converge.

☞ La relation ($\star$) nous dit en fait que la suite $(|u_n - \ell|)$ est *sous-géométrique* de raison k.
C' est aussi la *base* de l'élaboration de programmes `SciLab` permettant d'obtenir une valeur approchée de la limite.

En effet, un terme u_n fournira une approximation de ℓ à ε près si $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Il faut donc calculer u_n *jusqu'à* ce que cet écart soit assez petit. Mais comme on en sait pas *a priori* calculer ℓ, on utilise la majoration, et on calcule u_n jusqu'à ce que k^n soit plus petit que ε.

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2).$$

(1) Étudier les variations de f et montrer que $f([1;2]) \subset [1;2]$.
(2) Montrer que pour tout entier n, $u_n \in [1;2]$.
(3) Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = \sqrt{2}$.
(4) Montrer que pour tout $t \in [1;2]$, $\quad |f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$.
(5) Montrer que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|,$$

puis que :

$$|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(6) En déduire la convergence de la suite (u_n).
(7) Écrire alors un programme `SciLab` permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

3 Suites implicites

Définition 1. *Une suite implicite (x_n) est une suite définie par une équation E_n qui dépend de n, souvent de la forme*

$$x_n \text{ est l'unique solution de l'équation } f_n(x) = 0.$$

☞ Comme l'indique son nom, une suite implicite n'est pas explicite. *A priori*, elle ne vérifie pas de relation de récurrence et il n'existe pas d'expression en fonction de n.

☞ Les méthodes de la section précédente ne sont donc pas applicables.

☞ **La seule information** dont on dispose sur la suite (x_n) est qu'elle est solution de l'équation E_n, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'équation $f_n(x_n) = 0$. Cette relation permet de déduire de nombreuses propriétés de la suite et on y revient toujours.

☞ , L'équation $\quad f_n(x_n) = 0\;$ vérifiée par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, on peut également écrire

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0, \qquad \text{ou} \qquad f_{n-1}(x_{n-1}) = 0.$$

☠ En revanche, on ne connait au départ rien sur

$$f_n(x_{n+1}) \qquad \text{ou} \qquad f_{n+1}(x_n)$$

et c'est justement l'estimation de ces quantités qui donne souvent le sens de variations de la suite (x_n).

3.1 Existence de la suite

☞ Pour montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, il faut montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. Pour cela, on utilise le **théorème de la bijection** en précisant les intervalles de départ et d'arrivée.

☞ Il est absolument nécessaire de dresser le tableau de variation de la fonction f_n qui va servir de support à l'étude de la suite implicite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

☞ On n'oublie pas que le théorème de bijection donne aussi les variations de la bijection réciproque, et cela s'avère parfois pratique et donne des résultats immédiats.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère l'équation

$$e^x + x - n = 0.$$

(1) Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on notera u_n.
(2) Montrer que u_n tend vers $+\infty$, lorsque $n \to +\infty$.

3.2 Encadrement de la suite

✐ Pour montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et/ou minorée, on utilise les variations de la fonction f_n **en raisonnant sur les images**.

Exercice 8. (D'après **EDHEC 2000**) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

(1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
(2) Calculer u_1 et u_2 puis vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

3.3 Monotonie de la suite

✐ Pour étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on commence par **déterminer le signe de** $f_{n+1}(x_n)$ **ou de** $f_n(x_{n+1})$.

Exercice 9. On reprend la suite implicite de l'Exercice 8.

(1) Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
(2) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).

3.4 Convergence de la suite et limite

☞ Comme la suite est implicite, le moyen de prouver la convergence de la suite est d'utiliser le **théorème de convergence monotone**.

Une fois l'existence de la limite établie (notée ℓ), on peut alors passer à la limite dans la relation vérifié par x_n, à savoir $f_n(x_n) = 0$, ce qui donne une équation en ℓ.

☠ Lors du passage à la limite dans la relation $f_n(x_n) = 0$, certaines formes indéterminées subtiles peuvent apparaitre, du type $\lim x_n^n$.
Ce calcul assez délicat fait souvent l'objet d'une question dédiée.

Exercice 10. (Exercice 8, suite et fin).

(1) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
(2) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
(3) Donner enfin la valeur de ℓ.

4 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Suites récurrentes

Exercice 301. (D'après **EML 2016**) On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et on admet : $0{,}69 < \ln(2) < 0{,}70$.

(1) (a) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
(b) Justifier que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0;+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
(c) Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
(d) Montrer que C admet une tangente verticale en O.
(e) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.
(f) Tracer l'allure de C.

(2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.
(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
(c) Étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$ puis en déduire les solutions de l'équation $f(t) = t$.
(d) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(e) Écrire un programme `SciLab` qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1-u_N < 10^{-4}$.

Exercice 302. (D'après **EML 2010**) On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = x - \ln\left(1+x^2\right).$$

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_0 = 1, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

(1) (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f''(x) = 2\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}.$$

(b) Dresser le tableau de variation de la fonction f, limites comprises.
(c) Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
(d) Tracer $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé. *On précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.*
(e) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

(2) (a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
(c) Établir que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
(d) Écrire un programme en `SciLab` qui calcule et affiche le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.

(3) (a) Établir que : $\forall x \in [0,1], \ f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.
(c) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.

Exercice 303. (D'après **EML 1995**). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\ln(1+x)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;+\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) (a) Montrer que f est C^2 sur $[0;+\infty[$ et calculer, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
(b) En déduire les variations de f.

(2) (a) Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Quelles sont les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(3) On suppose dans cette question : $u_0 \in]e-1;+\infty[$.
(a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

(4) On suppose, dans cette question : $u_0 \in]0;e-1[$.
Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 304. (D'après **ECRICOME 2006**)
On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x + 1 + 2e^x$.

(1) (a) Étudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
(b) Déduire des variations de f l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2;-1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (On rappelle que $e \simeq 2,7$)

(2) On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

(a) Prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que que pour tous réels x et t :

$$f(x) + (t - x) f'(x) \leq f(t)$$

(b) En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \leq u_{n+1}$$

puis que pour tout entier naturel n :

$$\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1$$

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel à préciser.
(d) On admet que pour tout x de l'intervalle $[-2;-1]$:

$$0 \leq (x - \alpha) f'(x) - f(x) \leq \frac{(x-\alpha)^2}{e}$$

(i) Prouver alors que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n-\alpha)^2}{e}$.
(ii) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n-1}}.$$

(e) Écrire un programme en `SciLab` permettant, lorsque l'entier naturel p est donné par l'utilisateur, de calculer une valeur approchée de α, de telle sorte que l'on ait :

$$0 \leq u_n - \alpha \leq 10^{-p}.$$

Suites récurrentes et IAF

Exercice 305. (D'après **ECRICOME 2007**) Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right),$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n).$$

(1) Dresser le tableau de variation de f_a.
(2) En déduire que : $\forall t > 0,\ f_a(t) \geq a$.
(3) Démontrer que

$$\forall t > a,\ 0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}.$$

(4) Montrer que pour tout entier n, non nul : $u_n \geq a$.
(5) Prouver que pour tout entier n non nul

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}\left(u_n - a\right).$$

(6) En déduire que

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|.$$

(7) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et indiquer sa limite.
(8) En utilisant ce qui précède, écrire un programme Scilab permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

Suites implicites

Exercice 306. (D'après **ECRICOME 2019**) Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0 \qquad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

(1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1]$[et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

(2) En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

(3) (a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}.$$

(b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4.$$

(c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

(4) (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.
(b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty.$$

En déduire une contradiction.
(c) Déterminer la limite de (v_n).

(5) (a) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3$

(b) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function y=h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}^{+*}$ en entrée.

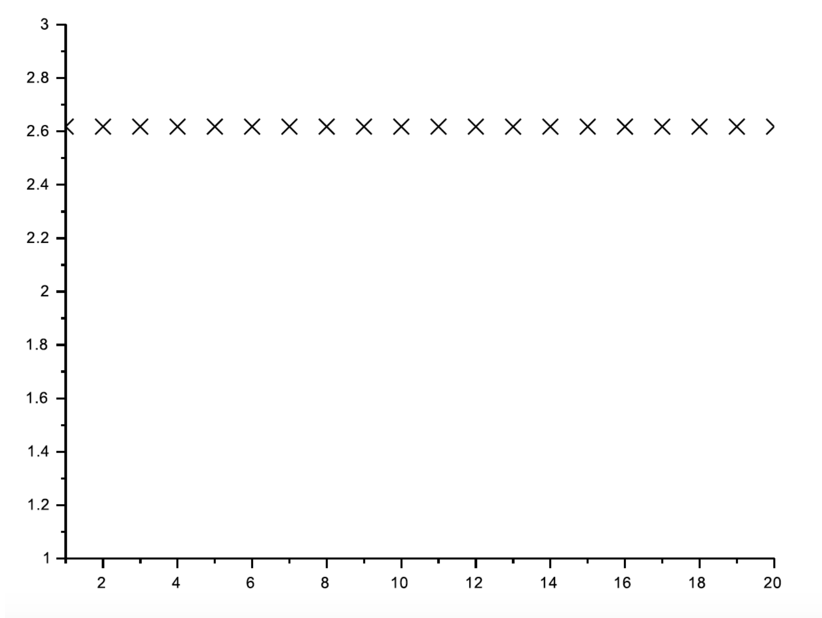
(c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
function res=v(n)
    a=1
    b=3
    while (b-a)>10^(-5)
        c=(a+b)/2
        if h(n,c) <4 then ........
            else ........
        end
     end
     ..........
endfunction
```

(d) À la suite de la fonction `v`, on écrit le code suivant :

```
X=1:20
Y=zeros(1,20)
for k=1:20
    Y(k)=v(k)^k
end
plot2d(X,Y,style=-2,rect=[1,1,20,3])
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ?

(e) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \qquad (v_n)^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

(f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4) c.

Exercice 307. (D'après **EDHEC 1997**) Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = x - n.\ln(x)$.

(1) (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
(b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels $u_n$et $v_n$solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

(2) Étude de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.
(a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
(b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
(c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
(d) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n-1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.

(3) Étude de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$
(a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.
(b) Calculer $f_n(n \cdot \ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geq 3,\ n.\ln(n) < v_n$.
(c) Soit g la fonction définie par: $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = x - 2\ln(x)$.
Étudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2\ln(n)$.
(d) En déduire le signe de $f_n(2n.\ln(n))$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)$
(e) Montrer enfin que: $\ln(v_n) \sim n \cdot \ln(n)$

Exercice 308. (***D'après **ESCP 1999**). Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, soit f_k la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^k}{x-1}, & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

(1) Étude des fonctions f_k.
(a) Justifier la dérivabilité de la fonction f_k sur les intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ et préciser la valeur de la dérivée $f_k'(x)$ pour tout $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.
Montrer que f_k est dérivable en 1 et donner, selon les valeurs de k, la valeur de $f_k'(1)$.
(b) On considère les fonctions auxiliaires φ_k définie, pour tout $x > 0$, par

$$\varphi_k(x) = k(x-1) - x\ln x.$$

Étudier, pour tout entier $k \geq 2$, les variations de φ_k.
Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $]1;+\infty[$. Dans la suite on notera a_k cette racine.
(c) En distinguant les cas $k = 2$, k pair et supérieur ou égal à 4, et k impair et supérieur ou égal à 3, donner le tableau de variations de la fonction f_k. (On précisera les limites aux bornes)

(2) Étude asymptotique de la suite $(a_k)_{k\geq 2}$.
(a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $e^{k-1} \leqslant a_k \leqslant e^k$.
(b) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $a_k = e^k(1+\delta_k)$. Montrer que le réel δ_k vérifie l'équation :

$$-ke^{-k} = (1+\delta_k)\ln(1+\delta_k).$$

Justifier l'inégalité : $|\ln(1+\delta_k)| \leq ke^{1-k}$.
En déduire que la suite $(\delta_k)_{k\geq 2}$ a une limite nulle, et plus précisément que δ_k est équivalent à $-ke^{-k}$ quand k tend vers l'infini.
(c) Justifier, en conclusion, la relation : $a_k = e^k - k + o(k)$.

Autres suites: un peu d'exotisme

Exercice 309. (D'après **ECRICOME 1999** - Concours Blanc ECE 1 Janvier 2016)

- **Préliminaires.** Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :
$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n.$$
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. (On donne: $\frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0,77$ à 10^{-2} près par excès et $\frac{1-\sqrt{13}}{6} = -0,44$ à 10^{-2} près par défaut.)

Soient alors a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1. On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :
$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

- **Question 1**
  (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geq 1$.
  (b) Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.
  (c) Écrire un programme en `SciLab` qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

- **Question 2**

  On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1.$$
  (a) Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.
  (b) Vérifier, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.
  En déduire que : $|v_{n+2}| \leq \dfrac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$.
  (c) On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n,
$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n.$$
  Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leq x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 310. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur R_+ par
$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

(1) Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$ et y préciser la limite de $f_n(x)$.
(2) On introduit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 1/3$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence
$$u_{n+1} = f_n(u_n).$$
(3) S'agit-il d'une suite récurrente comme celles étudiées dans ce chapitre?
(4) Calculer u_2 et u_3.
(5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. En déduire la monotonie de (u_n).

(6) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

(7) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n \leq \frac{1}{n}.$$

(8) En déduite que la suite (nu_n) est croissante, puis qu'elle converge vers un réell $\ell' \in]0;1]$.

(9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leq 1.$$

(10) Conclure quant à la valeur de ℓ'.