Chapitre 5. Séries numériques

1 (Rappels et) généralités

Définition 1. *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. La* ***série*** *de terme général u_n est la suite (S_n) définie par*

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Le terme S_n est appelé la ***somme partielle d'indice*** *n de la série. La série est notée $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$.*

Définition 2. *La série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est dite*

- ***convergente*** *si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles converge. Dans ce cas, sa limite est appelée la* ***somme*** *de la série et on note*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$

- ***divergente*** *si et seulement si $(S_n)_{n\geq n_0}$ a une limite infinie ou pas de limite.*

☞ Étudier la **nature d'une série**, c'est déterminer si elle converge ou pas. Dans le premier cas, on cherche alors à expliciter sa somme si c'est possible, mais ce n'est souvent pas le cas.

☠ La quantité $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est une **limite**. On n'écrira donc **jamais** $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ avant d'avoir au préalable justifié la convergence (en reconnaissant une série usuelle *via* manipulation du terme général ou en montrant que la suite des sommes partielles est convergente ou par comparaison).

☞ Soit n_0 un entier **fixé**. Remarquant qu'on peut décomposer (par la relation de Chasles) une somme partielle

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k,$$

il est clair que la nature de la série ne dépend par de la somme des n_0 premiers termes, celle-ci étant constante. La valeur du premier terme de la série ne modifie donc pas le caractère convergent ou divergent mais en revanche, cela modifie, en cas de convergence, la valeur de la somme.

Exercice 1. Après avoir justifié sa convergence, calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 100} 3^{-n}$.

Définition 3. *Soit* $\sum_{k\geq n_0} u_k$ *une série convergente. On appelle reste de la série, et on note* (R_n) *la suite définie, pour* $n \geq n_0$*, par*

$$R_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

☞ Il découle immédiatement de la définition que

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0.$$

Exercice 2. On considère la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$, dont on note S_n la somme partielle d'indice n.

(1) Montrer que la suite (S_n) est croissante.
(2) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
(3) En déduire que la série est convergente. On note S sa somme.
(4) Déduire également de la Question (2), que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \geq n$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{p}.$$

En déduire une majoration du reste.
(5) Écrire un programme `SciLab` permettant d'obtenir une valeur approchée à 10^{-3} de S. *À titre purement informatif, il est possible de montrer que* $S = \pi^2/6$.

1.1 Propriétés des séries convergentes

☞ On a un lien très utile entre somme(s) partielle(s) et terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_{n+1} = S_{n-1} + u_n \Longleftrightarrow u_n = S_n - S_{n-1}.$$

En particulier, il en découle immédiatement le résultat suivant.

Proposition 1. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) converge vers 0.

☠ La convergence vers 0 du terme général est une condition **nécessaire** mais absolument pas suffisante. L'exemple classique est celui de la série harmonique, proposé ci-dessous.

Exercice 3. Soit H_n la somme partielle d'indice n de la *série harmonique* $\sum 1/k$.

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

(2) En déduire la convergence de la série harmonique.

☞ En revanche, la non convergence vers 0 du terme général permet immédiatement de conclure à la divergence de la série. On dit d'ailleurs dans ce cas que la série **diverge grossièrement**.

Proposition 2. Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries convergentes, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la série $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$, de terme général $(\lambda u_n + \mu v_n)$, est encore convergente. Sa somme est égale à la combinaison linéaire correspondante des sommes des deux séries.

☠ La réciproque de la proposition précédente est fausse. Il est tout à fait possible que $\sum(u_n + v_n)$ converge sans qu'aucune des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne converge. Par exemple,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

La série $\sum 1/k(k+1)$ est convergente, mais les deux séries $\sum 1/k$ et $\sum 1/(k+1)$ divergent.

2 Techniques et séries usuelles

2.1 Séries télescopiques

Proposition 3. Une suite (u_n) est convergente si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est convergente. Auquel cas, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0.$$

Exercice 4. Soient f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f : x \mapsto x - x^2$ et (u_n), de premier terme $u_0 \in]0;1[$, vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n) = u_n - u_n^2.$$

(1) Dresser le tableau de variations de f.
(2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0;1[$.
(3) Étudier la monotonie puis la convergence de (u_n). Déterminer sa limite.
(4) Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et préciser sa somme.

2.2 Comparaison série/intégrale

Si le terme général d'une série est donnée par une formule du type $u_n = f(n)$, où f est une fonction monotone (souvent décroissante) sur $\mathbb{R}_+$, on peut obtenir, par positivité de l'intégrale, des inégalités ou encadrements *du type*

$$\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq u_n \qquad \text{ou} \qquad u_n \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t,$$

qui, en passant à la somme, donnent une estimation des sommes partielles à l'aide de $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$.

L'exemple le plus classique est celui menant à l'obtention du critère de convergence des séries de Riemann (voir ci-après), ou de l'obtention de l'équivalent en $\ln(n)$ pour la série harmonique (voir **ECRICOME 2018**).

Exercice 5.

(1) Étudier les variations de $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ et en déduire que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k\ln(k)} \geq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}.$$

(2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$

(3) Conclure quant à la nature de la série de terme général $1/k\ln(k)$.

2.3 Séries géométriques (dérivées), série exponentielle

Théorème 1. *Les séries*

$$\sum_{n\geq 0} q^n, \qquad \sum_{n\geq 1} nq^{n-1}, \qquad \textit{et} \qquad \sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$$

sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$. *Dans ce cas,*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \textit{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Théorème 2. *La série exponentielle* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *converge pour tout réel* x. *De plus, on a* $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

☞ On utilise énormément ces résultats en probabilités; les séries géométriques apparaissent dès qu'intervient la *loi géométrique*, la série exponentielle dès qu'intervient la *loi de Poisson*.

2.4 Séries de Riemann

La comparaison série/intégrale avec la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ (pour $\alpha > 0$) permet d'obtenir le résultat suivant, essentiel dans le cadre de l'étude des séries; les séries de Riemann étant *les* séries de référence.

Théorème 3 (Critère de convergence des séries de Riemann)**.**

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \textit{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

☞ On retrouve notamment que la série harmonique $\sum 1/k$ diverge, alors que la série $\sum 1/k^2$ converge.

3 Séries à termes positifs

Dans toute cette section, on considère des séries définies par des suites dont tous les termes sont positifs.

☞ Lorsque l'on utilise un des résultats suivants, il est indispensable d'avoir justifié et de bien mentionner que la série est à termes positifs.

3.1 Une première observation

☞ Il est clair que si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, la suite (S_n) des sommes partielles est **croissante**:

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0.$$

Le théorème de convergence monotone permet alors d'établir le résultat suivant.

Proposition 4. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

(i) La série est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont majorées.
(ii) Si la série diverge alors elle diverge vers $+\infty$.

3.2 Critères de comparaisons

Théorème 4 (Comparaison par inégalité)**.** *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles qu'à partir d'un certain rang,* $0 \leq u_n \leq v_n$.

(i) Si $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge.*
(ii) Si $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Exercice 6. On considère la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{4^k + \ln(k+1) + 1}$.

(1) Montrer que cette série converge. On note S sa somme.
(2) On souhaite déterminer une valeur approchée de S.
   (a) Montrer que :
$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k + \ln(k) + 1} - S \right| \leq \frac{1}{3 \times 4^n}.$$
   (b) Écrire une fonction `SciLab`, d'entête `y=S_approx(eps)` prenant en paramètre un réel `eps` et renvoyant une valeur approchée de S à `eps` près.

Théorème 5 (Comparaison par négligeabilité)**.** *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n = o(v_n)$.

(i) Si $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge.*
(ii) Si $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Exercice 7.

(1) Montrer que
$$\frac{n^2-4}{e^n - n - 2\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty.$$
(2) En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{n^2-4}{e^n - n - 2\ln(n)}$.

☞ Pour montrer la convergence de $\sum u_n$, on regarde donc souvent la limite de $n^2 u_n$.

Théorème 6 (Comparaison par équivalents)**.**

Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que*
$$u_n \sim v_n, \quad n \to +\infty.$$
Alors les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

Exercice 8. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{3n^2 + 7n + \ln(n) - 1}{2n^3 - n + 3}$.

☞ Pour utiliser ces critères, on travaille sur le terme général. On rédige **soigneusement** le raisonnement.

- On commence par vérifier et justifier que celui-ci est positif (au moins à partir d'un certain rang);
- On compare au terme général d'une série usuelle (bien souvent une série de Riemann)
- On peut enfin conclure.

Exercice 9. Déterminer la nature des séries de terme général
$$(i)\ u_n = \frac{1}{3^n \ln(n)}, \qquad (ii)\ v_n = \sqrt{n}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right).$$

3.3 Convergence absolue

Dans ce paragraphe, la série de terme général u_n n'est plus forcément une série à termes positifs.

Définition 4. *On dit que la série* $\sum u_n$ ***converge absolument*** *(ou est* ***absolument convergente****) si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Théorème 7. *Si la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente alors elle est aussi convergente.*

☠ La réciproque de cette propriété est fausse. Le contre-exemple classique est celui de la série harmonique alternée, proposé ci-dessous.

Exercice 10. (Série Harmonique alternée). On considère la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n/n$ dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.

(1) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
(2) En déduire la nature de la série harmonique alternée. Est-elle absolument convergente?

☞ La convergence absolue permet de ramener l'étude à une série à termes positifs, ce qui permet d'utiliser les résultats de comparaison associés à ces séries.

Exercice 11. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + \ln(2n)}$.

4 Autres exercices

Exercice 501.

(1) Montrer que la série $\sum_{k\geq 2} k^2 \mathrm{e}^{-k}$ est convergente et calculer sa somme.
(2) En déduire la nature de la série $\sum_{k\geq 2} \sqrt{k}\mathrm{e}^{-k}$.

Exercice 502. Déterminer la nature de chacune des séries

$$(i)\ \sum_{k\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}}\right), \qquad (ii)\ \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^2\ln(k)}, \qquad (iii)\ \sum_{k\geq 0}\left(\exp\left(\frac{k^2+1}{k^4+1}\right)-1\right).$$

$$(iv)\ \sum_{k\geq 1}\left((k+1)^{1/4}-(k-1)^{1/4}\right), \qquad (v)\ \sum_{k\geq 1}\left(1-\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^k\right).$$

Exercice 503. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^3+2n^2-4n+1}{n!}, \qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

(1) Justifier que $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
(2) En déduire qu'il existe des réels (que l'on déterminera ensuite) a, b, c, d tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$n^3+2n^2-4n+1 = a+bn+cn(n-1)+dn(n-1)(n-2).$$

(3) Conclure quant à la convergence de $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 504. (Somme de la série harmonique alternée)

On pose, pour tout entier $n\geq 1$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\mathrm{d}t.$$

(1) En intégrant par parties, montrer que pour tout entier $n\geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n.$$

(2) Calculer I_0 et en déduire I_1.
(3) En déduire que, pour tout entier $n\geq 1$, $T_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$.
(4) Montrer que, pour tout $n\geq 1$,

$$0\leq I_n\leq \frac{1}{n+1}.$$

(5) Conclure.

Exercice 505. (D'après **EML 2015**) On considère l'application $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto f(x) = x^3e^x$.

(1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f(n)}$ converge. On note S sa somme.
(2) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad \left|S-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(n)}\right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

(3) En déduire une fonction en `SciLab` qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 506. (D'après **ECRICOME 1997**) Soit α est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (\alpha + k)}.$$

(1) (a) Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente. On note $\ell(\alpha)$ sa limite.
(b) Que peut-on déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?
(c) On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que

$$u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}.$$

(d) Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.

(2) Dans cette question : $\alpha \in]0, 1]$.
(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(\alpha) \geq \frac{1}{n + \alpha}.$$

(b) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

Exercice 507. (***) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}, \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}.$$

(1) Justifier la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis déterminer $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{v_n}{u_n^2}$.

(2) Soit Q la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(x - \frac{1}{j}\right)^2.$$

(a) A l'aide de l'étude de Q, établir l'inégalité : $u_n^2 \leq n\, v_n$.
(b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{v_n}{u_n^2}$.

Exercice 508. (D'après **EML 2017**)

On considère la fonction $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - \mathrm{e} \ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Étude de la fonction f

(1) (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

(b) Dresser le tableau de variations de f' avec les limite de f' en 0 et $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

(2) Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

(3) Tracer la courbe représentative de f.

(4) (a) Étudier les variations de la fonction $u :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) - x$.
(b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(5) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

(6) (a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - x$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(7) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

(8) Écrire un programme en `SciLab` qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

(9) (a) Démontrer :
$$\forall x \in [2; +\infty[, \qquad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{3}.$$
(b) En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant \frac{6-\mathrm{e}}{2} u_n..$$
(c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 509. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

(1) Montrer que f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Donner les tableaux de variations de f et de f^{-1}.
(2) Vérifier qu'il existe un unique nombre $\alpha \in [0; 1]$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.
(3) Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 &= \alpha \\ u_{n+1} &= f^{-1}(u_n), \qquad n \geq 0. \end{cases}$$
est bien définie (*i.e.* que u_n existe pour tout entier n) et que $u_n \in]0; 1]$.
(4) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) - x \geq 0$ et que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.
(5) En déduire la monotonie de la suite (u_n), puis qu'elle converge. On précisera sa limite.
(6) On s'intéresse alors à la série de terme général u_n dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.
(a) Montrer que, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$.
(b) En déduire, par récurrence, que pour tout entier n,
$$u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}.$$
(c) À l'aide du critère de comparaison, montrer que la série $\sum u_n$ converge. On note L sa somme. Montrer que $\alpha \leq L \leq 2$.
(d) Montrer finalement que
$$u_n \sim \frac{e^{-L}}{2^n}, \qquad n \to +\infty.$$

Exercice 510. (***) Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tels que la série $\displaystyle\sum \frac{a^k}{1+b^k}$ soit convergente.

Exercice 511. (***Extrait de **DM 3**, Automne 2019)

(1) Rappeler la formule de Taylor-Young, à l'ordre 2 au voisinage de 0.
(2) Soit $f : \ t \mapsto \ln(1+t) - t$.
(a) Donner le domaine de définition de f puis un équivalent de $f(t)$ au voisinage de 0.
(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

(3) On considère un nombre réel $a > 0$ et une suite à termes strictement positifs $(u_n)_{n\geq 1}$. On introduit alors les suites (w_n) et (ℓ_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{a}{n}, \qquad \ell_n = \ln(n^a u_n).$$

On **suppose** que la série de terme général w_n est absolument convergente.

(a) Montrer la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w_n^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{w_n}{n}$.

(b) Vérifier que

$$\ell_{n+1} - \ell_n = f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + af\left(\frac{1}{n}\right).$$

(c) Préciser

$$\lim_{n\to+\infty} w_n - \frac{a}{n}.$$

puis la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f\left(w_n - \frac{a}{n}\right)$.

(d) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\ell_{n+1} - \ell_n)$.

(e) Que peut-on en déduire à propos de la suite (ℓ_n)?

(f) Conclure qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}.$$

(4) Application. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

(a) Expliciter u_1, u_2, u_3.

(b) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 512. (**/*** Extrait du **CB n°5**, Printemps 2020) On considère la fonction f définie sur $[0;1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\right), & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I - Étude de f

(1) Montrer que f est continue sur $[0;1[$.

(2) Déterminer l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0;1[$.

(3) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

(4) (a) Montrer que f est dérivable en 0.

(b) Expliciter le développement limité d'ordre 1 de f en 0.

(c) Justifier que f est dérivable sur $]0;1[$ puis, pour $x \in]0;1[$, calculer $f'(x)$.

(5) On pose, pour $y \in \mathbb{R}$, $g(y) = y^2 + y - 1$ et $x_0 = \exp\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

(a) Dresser le tableau de signes de $g(y)$.

(b) Montrer que, pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x) = \dfrac{g(\ln(x))}{\ln(x)^2}$.

(c) En déduire que: $f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq x_0$.

(6) Dresser le tableau de variations de f.

(7) Représenter graphiquement l'allure de la courbe de f. On fera apparaître la tangente en 0.
On donne

$$e^{-1} \simeq 0.37, \qquad x_0 \simeq 0.2, \qquad f(x_0) \simeq 0.08.$$

Partie II - Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in]0; x_0[, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(8) Montrer que, pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) < x$ et en déduire que, pour $x \in [0;1[$, $f(x) = x$ si et seulement si $x = 0$.

(9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \in]0; x_0[$.

(10) Montrer que (u_n) est monotone.

(11) En déduire que (u_n) converge vers une limite à préciser.

(12) Écrire un programme `SciLab` qui demande à l'utilisateur de rentrer la valeur de x_0 et calcule puis affiche le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.

(13) Le but de cette dernière question est l'étude de la convergence de la série $\sum u_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_{n+1})^2 - \ln(u_n)^2$.
Montrer que la série de terme général v_n diverge.

(b) Rappeler un équivalent en 0 de $\ln(1+x)$ et de $(1+x)^2 - 1$.

(c) Montrer que

$$v_n = \ln(u_n)^2 \left[\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)} \right)^2 - 1 \right].$$

(d) Déduire des deux questions précédentes que $v_n \sim 2,\ n \to +\infty$.

(e) **On admet** que $\ln(u_n)^2 \sim 2n,\ n \to +\infty$.
Montrer que

$$n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n \ln^4(u_n)}{4}, \quad \text{puis que} \quad u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty.$$

(f) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 513. (**Extrait de **DS n°2**, Automne 2019)

Partie I - Étude d'une suite récurrente

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}.$$

On introduit également la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire que la suite (v_n) est bien définie.

(2) Trouver un réel $q \in]0;1[$ tel que

$$\frac{\ln(n)}{2^n} = o(q^n), \qquad n \to +\infty.$$

En déduire que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans toute la suite, on note

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.$$

(3) (a) Pour tout entier $k \geq 1$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.
(b) Déterminer alors la nature de la série $\sum_{k\geq 1}(v_k - v_{k-1})$.
(c) En déduire la convergence de la suite (v_n) et exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.

(4) On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$.
(a) En distinguant les cas $u_0 < e^{-\sigma}$ et $u_0 > e^{-\sigma}$, déterminer le signe de ℓ.
(b) En déduire la limite de la suite $(\ln(u_n))$ puis le comportement en $+\infty$ de u_n.

(5) On suppose dans cette question que $u_0 = e^{-\sigma}$.
(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.$$

(b) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) \geq \frac{\ln(n+1)}{2}.$$

(c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie II - Approximation de σ

(6) (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x$.
(b) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, avec $m \geq n+1$. Déterminer

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad \text{et} \quad \lim_{m\to+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}.$$

(c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+2}{2^n}.$$

(7) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\sigma - \left(-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leq \frac{n+2}{2^n}.$$

(8) Écrire alors une fonction `SciLab` d'en-tête `function sigma=approx(eps)` prenant en argument un réel `eps` et renvoyant une approximation de σ à `eps` près.

Approfondissement***

*Cet exercice est réservé aux étudiant.e.s suffisamment à l'aise et avancé.e.s dans la maîtrise des notions plus basiques. Si le moment n'est pas encore venu de les attaquer, on pourra y revenir plus tard dans l'année. Il s'inspire du sujet **ECRICOME 2020**, série S.*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la **série** de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter:pour tout $n \in \mathbb{N}, R_{0,n} = u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

(1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.
  (a) Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum u_n$ converge.
  On se place désormais sous cette condition.
  (b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que :
  $$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$
  (c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,
  $$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$
  (d) En déduire que :
  $$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
  (e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2?
  (f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum u_n$ converge.

(2) On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \dfrac{1}{n^n}$.
  (a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3, u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}.$$

(c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge à l'ordre 2 , et que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}.$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

(e) La série $\sum R_{n,n}$ converge-t-elle ?

(3) On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

(a) Montrer que:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t = 0.$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k \mathrm{d}t,$$

montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

(c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

(d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} \mathrm{d}t.$$