ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Chapitre 6. Couples (et suites) de V.A. discrètes

1 Couples aléatoires discrets

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y, avec $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ fini ou dénombrable; le plus souvent on a
$$X(\Omega) \subset \mathbb{N}.$$

Définition 1.
On appelle couple aléatoire discret une application $V : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$.
Ainsi, on peut écrire $V = (X, Y)$, où X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, avec :
$$\forall \omega \in \Omega,\ V(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))\,.$$

1.1 Loi conjointe

Définition 2 (Loi conjointe)**.**
La loi conjointe du couple (X, Y) est la donnée de la fonction :
$$\begin{array}{rccl} \varphi_{X,Y} : & X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0,\ 1] \\ & (i, j) & \mapsto & P\left([X = i], [Y = j]\right) \end{array}$$
où $P\left([X = i], [Y = j]\right)$ est une notation (parfois utilisée) pour signifier $P\left([X = i] \cap [Y = j]\right)$.

✎ **Méthode.** Pour obtenir la loi du couple (X, Y), on commence par déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ puis on donne les valeurs de $P([[X = i] \cap [Y = j]])$ pour tout $i \in X(\Omega)$ et tout $j \in Y(\Omega)$.
Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, on peut résumer cette loi dans un tableau à double entrée.

☞ On peut parfois utiliser la formule des probabilités composées
$$P\left([X = i] \cap [Y = j]\right) = P_{[Y=j]}([X = i])P([Y = j]).$$

⚠ La probabilité $P\left([X = i] \cap [Y = j]\right)$ n'est *a priori* pas égale à $P\left([X = i]\right) \cdot P\left([Y = j]\right)$.

Exercice 1. Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On tire successivement, avec remise, deux boules de l'urne. On appelle X la somme des numéros obtenus et Y la valeur absolue de la différence entre les deux numéros obtenus.

(1) Préciser Ω, $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
(2) Déterminer la loi du couple (X, Y).
(3) Quels sont les couples $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ qui vérifient $[[X = x] \cap [Y = y]] = \emptyset$?

☞ L'exercice ci-dessus permet de voir notamment que $V(\Omega) \subsetneq X(\omega) \times Y(\Omega)$.

Proposition 1. On a :
$$\sum_{i\in X(\Omega)} \sum_{j\in Y(\Omega)} P\left([X = i] \cap [Y = j]\right) = \sum_{j\in Y(\Omega)} \sum_{i\in X(\Omega)} P\left([X = i] \cap [Y = j]\right) = 1.$$

1.2 Lois marginales

Définition 3 (Loi marginale).

(1) La première loi marginale du couple (X, Y) est la loi de la variable aléatoire X.
(2) La seconde loi marginale du couple (X, Y) est la loi de la variable aléatoire Y.

✎ **Méthode** (Obtention des lois marginales à l'aide de la formule des probabilités totales).
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont on connait la loi conjointe.

- On obtient la loi de X grâce à la formule des probabilités totales avec le s.c.e $([Y = j])_{j\in Y(\Omega)}$.

$$P([X = i]) = \sum_{j\in Y(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j]) \quad \text{ou} \quad P([X = i]) = \sum_{j\in Y(\Omega)} P([Y = j])P_{[Y=j]}([X = i])$$

- On obtient la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales avec le s.c.e $([X = i])_{i\in X(\Omega)}$.

$$P([Y = j]) = \sum_{i\in X(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j]) \quad \text{ou} \quad P([Y = j]) = \sum_{i\in X(\Omega)} P([X = i])P_{[X=i]}([Y = j])$$

Remarque 1. Si la loi du couple est résumée dans un tableau à double entrée, les lois marginales s'obtiennent en sommant les éléments de chaque ligne et de chaque colonne.

Exercice 2. Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire deux boules dans cette urne et on note X le numéro de la première boule et Y le numéro de la deuxième boule.

(1) Cas d'un tirage avec remise.
  (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
  (b) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y)
(2) Reprendre les questions précédentes dans le cas d'un tirage sans remise.

Exercice 3. On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0; 1[$ et face avec probabilité $q = 1-p$. On note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile.

(1) Préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ puis déterminer la loi du couple (X, Y).
(2) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) (sans calculs pour la loi de X).

1.3 Lois conditionnelles

Définition 4. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.*

- *Soit $j \in Y(\Omega)$ fixé tel que $P([Y = j]) \neq 0$. On appelle* ***loi conditionnelle de X sachant $[Y = j]$*** *la donnée des valeurs*

$$P_{[Y=j]}([X = i]), \quad \forall i \in X(\Omega).$$

- *Soit $i \in X(\Omega)$ fixé tel que $P([X = i]) \neq 0$. On appelle* ***loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$*** *la donnée des valeurs*

$$P_{[X=i]}([Y = j]), \quad \forall j \in Y(\Omega).$$

✎ **Méthode.** On peut obtenir une loi conditionnelle de différentes manières suivants les situations:

- Si on connait la loi du couple (donc les probabilités $P([X = i] \cap [Y = j])$), on utilise la formule des probabilités composées. Par exemple, la loi conditionnelle de X sachant $[Y = j]$ est donnée par :

$$P_{[Y=j]}([X = i]) = \frac{P([X = i] \cap [Y = j])}{P([Y = j])}, \quad \forall i \in X(\Omega).$$

- Si on ne connait pas la loi du couple, on peut souvent reconnaitre pour la loi conditionnelle une loi connue en utilisant l'information contenue dans l'évènement qui conditionne.

Exercice 4. On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0; 1[$. On note X le rang d'apparition du premier pile et si $X = n$, on note Y le nombre de faces obtenus lors de n lancers supplémentaires.

(1) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$.
(2) Préciser $Y(\Omega)$ puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(Y=k)=\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}(pq)^n.$$

2 Indépendance de variables aléatoires discrètes

2.1 Cas de deux variables

Définition 5. *On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont* ***indépendantes*** *si et seulement si :*

$$\forall (i,j) \in X(\Omega)\times Y(\Omega), \quad P([X=i]\cap[Y=j]) = P([X=i])\times P([Y=j])$$

Remarque 2. Pour montrer que deux variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple à la relation précédente.
On cherche alors souvent des évènements $[X=i]$ et $[Y=j]$ de probabilité non nulle et tels que l'évènement $[X=i]\cap[Y=j]$ est impossible donc de probabilité nulle.

Exercice 5.
(1) Les variables aléatoires X et Y de l'Exercice 2 sont-elles indépendantes (dans chaque cas) ?
(2) Les variables aléatoires X et Y de l'Exercice 3 sont-elles indépendantes ?

2.2 Cas de n variables

Définition 6.

- *On dit que les variables aléatoires discrètes $X_1,\ldots,X_n$ sont* ***mutuellement indépendantes*** *si et seulement si*

$$\forall (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \quad P([X_1=x_1]\cap\cdots\cap[X_n=x_n]) = \prod_{k=1}^{n} P([X_k=x_k]).$$

- *On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si pour tout $n\in\mathbb{N}$ les variables aléatoires $X_0,\cdots,X_n$ sont mutuellement indépendantes.*

2.3 Lemme des coalitions

Proposition 2 (Lemme des coalitions)**.**

- Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendante et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

- Soient $X_1,...,X_n$ n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes et soit $p\in[\![2;n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1,\cdots,X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{p+1},\cdots,X_n$.

Exemple.

- Si X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 sont 5 variables aléatoires discrètes discrètes mutuellement indépendantes alors les variables $X_1-X_2+2X_4^2$ et $X_3-X_5^2$ sont indépendantes.
- Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors X et Y ne le sont pas non plus.

3 Fonctions de deux variables aléatoires discrètes

Dans cette section, on étudie des variables aléatoires du type $Z=g(X,Y)$ où (X,Y) est un couple de variables aléatoires et g une fonction de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Déterminer la loi de $D=X-Y$ puis la loi de $P=XY$ où (X,Y) est le couple défini dans l'Exercice 2.

Exercice 7. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ deux variables de Bernoulli indépendantes. Déterminer la loi de XY.

Théorème 1.

- *L'ensemble des valeurs prises par $Z = g(X,Y)$ est donné par :*

$$Z(\Omega) = \{z = g(x,y) \mid i \in X(\Omega),\ j \in Y(\Omega)\}$$

- *La loi de $Z = g(X,Y)$ est donnée par :*

$$\forall k \in Z(\Omega), \quad P([Z=k]) = \sum_{(i,j) \mid g(i,j)=k} P([X=i] \cap [Y=j]),$$

la somme précédente portant sur l'ensemble des couples (i,j) vérifiant $g(i,j) = k$.

✎ **Méthode** (Loi d'une somme, d'une différence)**.**
On obtient la loi de la somme (ou de la différence) deux variables aléatoires discrètes X et Y par application de la formule des probabilités totales avec au choix le s.c.e associé à X ou à Y.

Par exemple, avec le s.c.e associé à X, la loi de $X+Y$ est donnée par : $\forall z \in (X+Y)(\Omega)$,

$$P(X+Y=k) = \sum_{i \in X(\Omega)} P([X=i] \cap [X+Y=k]) = \sum_{\substack{i \in X(\Omega) \\ k-i \in Y(\Omega)}} P([X=i] \cap [Y=k-i]).$$

☞ Noter que la probabilité $P([X=i] \cap [Y=k-i])$ est nulle dès que $k-i$ n'appartient pas à $Y(\Omega)$, ce qui a pour conséquence de restreindre les indices de la somme.

Exercice 8. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

(1) Déterminer, en utilisant un s.c.e associé à X, $P(X=Y)$.
(2) Montrer, en utilisant un s.c.e associé à X que pour tout $n \geq 2$: $P(X+Y=n) = (n-1)p^2q^{n-2}$.

Théorème 2 (Somme des lois classiques)**.**

- **Somme de lois de Bernoulli**. *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, alors*

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).$$

- **Stabilité des lois binomiales**. *Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ deux lois binomiales indépendantes. Alors,*

$$X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p).$$

- **Stabilité des lois de Poisson**. *Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux lois de Poisson indépendantes. Alors,*

$$X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu).$$

Exercice 9. Soient $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_k$ lorsque $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, $\ldots$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$.

4 Calculs d'espérance

4.1 Espérance de $Z = g(X,Y)$ - Théorème de transfert

Si on a déjà calculé la loi de $Z = g(X,Y)$, on peut calculer son espérance avec la formule classique. Sinon, on peut utiliser le théorème suivant qui nécessite seulement de connaitre la loi du couple.

Théorème 3 (Théorème de transfert)**.** *Soit (X,Y) deux variables aléatoires discrètes. Alors, on a sous réserve de convergence absolue :*

$$E(Z) = E(g(X,Y)) = \sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} g(i,j) P([X=i] \cap [Y=j]).$$

Remarque 3. Si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont deux ensembles finis, il n'y a pas de problème de convergence (absolue), puisqu'il s'agit alors d'une somme (double) finie. Dans le cas où (au moins) un des deux ensembles est infini, le caractère licite de l'écriture de la somme ci-dessus est conditionné par la convergence absolue d'une série à double indice et présente donc un problème assez subtil. Les sujets des problèmes de concours faisant intervenir ce type de somme proposent donc un guidage étape par étape pour en justifier l'existence d'une telle somme.

Exercice 10. Soient $D = X - Y$ et $P = XY$ où (X, Y) les variables aléatoires définies dans l'Exercice 2.

(1) Déterminer l'espérance de $P = XY$ à l'aide du théorème de transfert.
(2) Déterminer l'espérance de $D = X - Y$ à l'aide de la loi trouvée dans l'Exercice 6.

4.2 Espérance d'une somme

Proposition 3 (Linéarité de l'espérance)**.**

- Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes admettant une espérance, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors :
$$E(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(X_i).$$
- Lorsque les constante sont égales à 1, on obtient le cas particulier important :
$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Exercice 11. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires suivant toute la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $M = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer l'espérance de M.

4.3 Espérance d'un produit

Théorème 4. *Soit (X, Y) deux variables aléatoires discrètes. Alors, on a*
$$E(XY) = \sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} ijP([X = i] \cap [Y = j]).$$

Théorème 5. *Si X et Y sont **indépendantes** et admettent une espérance, alors XY admet une espérance, et on a*
$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

☞ On peut utiliser le théorème précédent pour montrer que deux variables aléatoires discrètes ne sont pas indépendantes en vérifiant que $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.

Exercice 12. Soient X_1, X_2, et X_3, indépendantes, suivant des lois de Bernoulli de paramètre p. Montrer que les variables aléatoires $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$ ne sont pas indépendantes.

5 Variance et covariance

5.1 Covariance

Définition 7. *Soient (X, Y) deux variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2. La **covariance** de X et Y est définie par :*
$$\operatorname{cov}(X, Y) = E\Big((X - E(X)) (Y - E(Y)) \Big).$$

Théorème 6 (Formule de Koenig-Huygens)**.** *Soient (X, Y) deux variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2. Alors :*
$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$
En particulier, on a :
$$\operatorname{cov}(X, X) = V(X)$$

Exercice 13. Déterminer la covariance des variables X et Y de l'Exercice 2 dans chaque cas.

Proposition 4 (Propriétés de la covariance)**.**

- Symétrie : $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$.
- Linéarité à gauche : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \operatorname{cov}(\lambda X_1 + \mu X_2\,,\, Y) = \lambda\operatorname{cov}(X_1\,,\,Y) + \mu\operatorname{cov}(X_2\,,\,Y)$.
- Linéarité à droite : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \operatorname{cov}(X\,,\,\lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda\operatorname{cov}(X\,,\,Y_1) + \mu\operatorname{cov}(X\,,\,Y_2)$.

Exercice 14. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que : $V\left(X + \lambda Y\right) = V\left(X\right) + 2\lambda\operatorname{cov}(X,Y) + \lambda^2 V\left(Y\right)$.

Proposition 5. Si X et Y sont indépendantes, alors : $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$. **La réciproque est fausse !**

5.2 Variance d'une somme

Théorème 7.

- *Si X et Y admettent une variance, alors $X+Y$ également, et :*
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\cdot\operatorname{cov}(X,Y).$$
- *Si X et Y sont indépendantes, et admettent une variance, alors $X+Y$ aussi, et on a :*
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$
- *Si les variables $X_1,\ldots,X_n$ sont mutuellement indépendantes, et admettent une variance, alors la variable $X_1+\cdots+X_n$ admette une variance et on a :*
$$V(X_1+\cdots+X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n).$$

Exercice 15. Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toute la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $M = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer la variance de M.

5.3 Coefficient de corrélation linéaire

Définition 8. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes admettant des variances non nulles. Le* ***coefficient de corrélation linéaire*** *de X et Y est : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.*

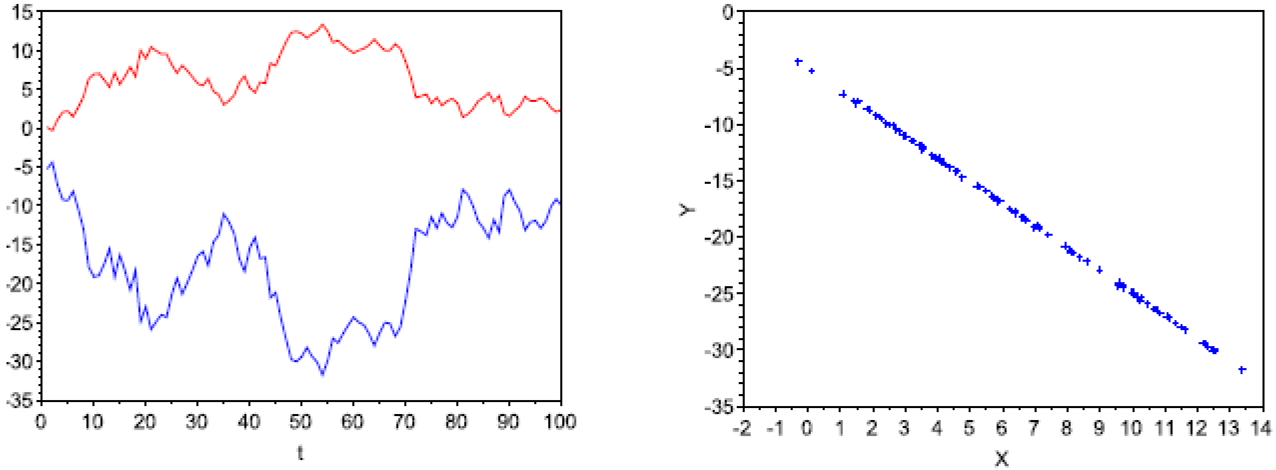
Théorème 8. *Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est un réel compris entre -1 et 1 :*
$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1.$$

Exercice 16. On a obtenu dans l'Exercice 14 l'égalité suivante
$$V\left(X+\lambda Y\right) = V\left(X\right) + 2\lambda\operatorname{cov}(X,Y) + \lambda^2 V\left(Y\right).$$
En étudiant le discriminant du polynôme en λ obtenu, montrer que : $|\rho_{X,Y}| \leq 1$.

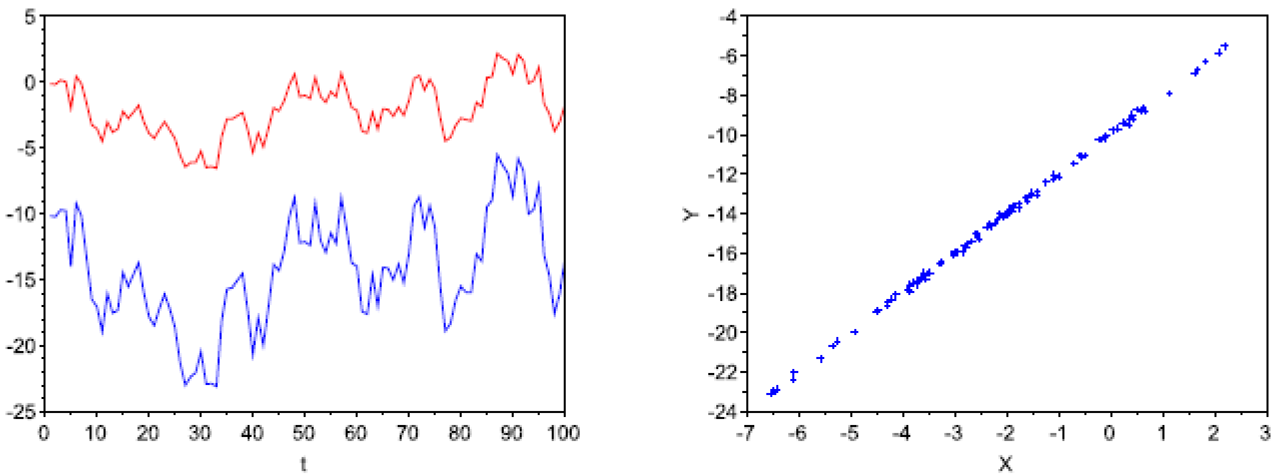
Proposition 6. Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est un réel compris entre -1 et 1 :
$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

- Il est égal à 1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable.
- Il est égal à -1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine décroissante de l'autre variable.
- Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables.
  - Plus le coefficient $\rho_{X,Y}$ est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les variables est forte.
  - Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle (et donc le coefficient de corrélation linéaire est nul) sont dites non corrélées.
  - Une corrélation positive ($\rho_{X,Y} > 0$) indique que les variables X et Y varient dans le même sens.
  - Une corrélation négative ($\rho_{X,Y} < 0$) indique que les variables X et Y varient en sens inverse.

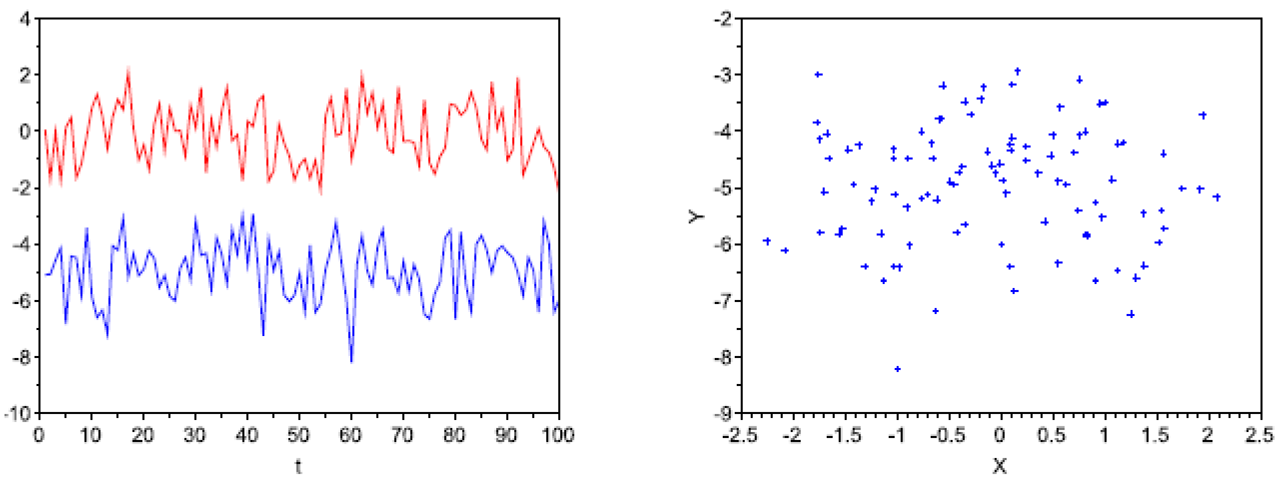
☞ Ces notions seront illustrées notamment au cours du TP 3.



Corrélation négative



Corrélation positive



Corrélation nulle

6 Autres exercices

Exercice 601. Soient X et Y deux variables aléatoires dont on suppose que la loi du couple est donnée par le tableau

$X \backslash Y$	1	2	3
1	2β	3β	3β
2	3β	2β	3β
3	3β	3β	2β

(1) Déterminer la valeur du réel β pour que ce tableau représente effectivement la loi d'un couple.
(2) Expliciter les lois marginales de X et Y. En déduire la valeur de $E(X)$ et $E(Y)$.
(3) Calculer $E(XY)$ puis vérifier que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = -\frac{1}{12}.$$

Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 602. Un binôme de deux personnes nommées A et B participent à une épreuve physique. Ces deux personnes doivent grimper une corde. Une fois que l'une des deux personnes a réussi, elle doit attendre que l'autre personne en fasse de même. On considère que

- A et B disposent chacun de leur propre corde.
- A et B ont droit à autant d'essais qu'ils le souhaitent.
- Les essais sont indépendants.
- Chaque essai, qu'il soit réussi ou non, dure une minute et est réussi avec probabilité p.

On note X_1 (resp. X_2) le nombre d'essais nécessaires à A (resp. B) pour grimper la corde, et Y la variable aléatoire réelle égale à $|X_1 - X_2|$.

(1) Quelle est la loi de X_1? De X_2? Donner leur espérance et leur variance.
(2) Que représente l'événement $[Y = 0]$? Déterminer sa probabilité.
(3) Montrer que pour tout on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y = k) = \frac{2p(1-p)^k}{2-p}.$$

(4) Écrire un programme `SciLab` permettant de simuler la variable aléatoire Y.
(5) Pour quelles valeurs de p les deux personnes s'attendront-elles en moyenne moins de 5 minutes ?

Exercice 603. Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi conjointe

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+1} j!}.$$

(1) Déterminer le réel a.
(2) Déterminer les lois marginales.
(3) X et Y sont-elle indépendantes ?

Exercice 604. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire une à une, sans remise, toutes les boules de l'urne et on définit deux variables aléatoires X et Y correspondant respectivement au rang d'apparition de la première boule blanche et de la boule numérotée 1.

(1) Déterminer les lois de X et Y.
(2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes? Calculer $\rho_{X,Y}$.

Exercice 605. Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p. On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule obtenue. Si $X = k$, on tire k fois, avec remise, une boule dans l'urne U_2 et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

(1) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
(2) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$, pour $k \in X(\Omega)$.
(3) Déterminer la loi du couple (X, Y).
(4) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 606. Soient X et Y telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et telles que la loi conditionnelle de Y, sachant $X = k$ (où $k \in X(\Omega)$) est une loi binomiale de paramètre $n - k$ et p. Quelle est la loi de Y?

Exercice 607. Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ que l'on suppose indépendantes. On définit $S = X_1 + X_2$ et $D = X_1 - X_2$. Calculer $\rho_{S,D}$. Les variables S et D sont-elles indépendantes?

Exercice 608. Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchisant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il lance une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité p. On pose $q = 1 - p$.
On note N, X et Y respectivement le nombre de lancers, le nombre de piles obtenus et le nombre de face obtenus.

(1) (a) Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, calculer la probabilité $P_{(N=j)}(X = i)$.
(b) En déduire la loi du couple (X, N).
(c) Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp.
(2) Expliquer sans aucun calcul pourquoi Y suit une loi de Poisson de paramètre λq.
(3) Montrer que X et Y sont indépendantes.
(4) (a) Montrer que : $V(Y) = V(N) + V(X) - 2\text{cov}(N, X)$.
(b) En déduire $\text{cov}(N, X)$.
(c) Donner de même $\text{cov}(N, Y)$.

Exercice 609. (D'après **EML 2013**) On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher ($n \geq 2$).On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

(1) Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
(2) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes?

(3) Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
(a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
(b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Exercice 610. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

(1) Déterminer la loi du couple (X, Y)
(2) Calculer $P(X = Y)$
(3) Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 611. On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité p. On note $q = 1 - p$.
On dit que la première série est de longueur $n > 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté.
Par exemple si les lancers donnent les résultats $FFPPPPPPFFFPP\dots$ alors la première série est de longueur 2 et la deuxième est de longueur 6.
Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

(1) Déterminer la loi de X_1.
(2) Montrer que X_1 admet une espérance et que $E(X_1) = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p}$.
(3) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
(4) En déduire la loi de X_2.
(5) Montrer que X_2 admet une espérance et que $E(X_2) = 2$.
(6) Montrer que $E(X_1X_2)$ existe et que $E(X_1X_2) = \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p}$.
(7) On suppose que $p = 1/2$. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.
(8) On suppose que $p \neq 1/2$.
  (a) En considérant $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
  (b) Vérifier que $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 4 - \dfrac{1}{pq}$ puis en déduire une nouvelle preuve que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 612. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère une urne contenant 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, ..., n boules numérotés n.

(1) On tire une boule de cette urne, on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

(2) On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise. On note T_1 le numéro de la première boule obtenue et T_2 le numéro de la deuxième boule.

  (a) Déterminer la loi du couple (T_1, T_2).
  (b) En déduire la loi des variables T_1 et T_2.
  (c) Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?
  (d) Déterminer $E(T_1 + T_2)$.

Exercice 613. (D'après **ECRICOME 2007**) Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

(1) L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P\left[S = 0 \cap U = 0\right] = 0.4$$
$$P\left[S = 0 \cap U = 1\right] = 0.3$$
$$P\left[S = 1 \cap U = 0\right] = 0.2$$
$$P\left[S = 1 \cap U = 1\right] = 0.1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

  (a) Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = 3/5$.
  (b) Calculer la covariance du couple (S, U). Les variables S et U sont-elles indé-pendantes ?
  (c) Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?

(2) On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.

Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geq 2$). On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :

- C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
- L_1(resp.L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp.du $2^{ème}$) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp.au moins deux) et à zéro sinon

(a) Reconnaître la loi de C_n, rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.
(b) Déterminer la loi de L_1 et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P\left[L_1 = k\right] = 1.$$

(c) Déterminer la loi de L_2.

Exercice 614. (Extrait du **CB3**, Automne 2018)
Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0. A partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant:

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité $1/2$;
- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $1/4$;
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $1/4$.

Les différents sauts sont supposés indépendants.
Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les variables aléatoires suivantes :

- X_n est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des n premiers sauts ;
- Y_n est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des n premiers sauts ;
- Z_n est égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des n premiers sauts ;
- A_n est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n-ième saut.

(1) On rappelle qu'en `SciLab` l'instruction `grand(1,1,'uin',1,4)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur $[\![1;4]\!]$.
Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule les n premiers déplacements de la puce lorsque n est donné en paramètre.

```
function D = Deplacement(n)
    D = zeros(1,n)
    for k = 1 : n
        t = grand(1,1,'uin',1,4)
        if t <= ...... then D(k) = 1 end
        if t == ...... then D(k) = 2 end
        if t == ...... then D(k) = 3 end
    end
endfunction
```

(2) (a) Reconnaître les lois de X_n, Y_n et Z_n puis donner leurs espérances et leurs variances.
(b) Justifier que $X_n + Y_n$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
(c) En utilisant les valeurs de $V(X_n)$, $V(Y_n)$ et $V(X_n + Y_n)$ montrer que

$$\text{Cov}\left(X_n, Y_n\right) = -\frac{n}{8}.$$

(d) Expliquer le signe de cette covariance puis calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho\left(X_n, Y_n\right)$. *On simplifiera les calculs.*

(3) (a) Déterminer $A_n(\Omega)$ puis calculer $P(A_n = n)$ et $P(A_n = 3n)$.
(b) Les variables aléatoires A_n et Z_n sont-elles indépendantes ?
(c) Exprimer A_n en fonction de X_n, Y_n et Z_n puis montrer que

$$E(A_n) = \frac{7n}{4}.$$

(d) Justifier la relation $X_n + Y_n + Z_n = n$.
(e) Exprimer alors A_n en fonction de X_n et Y_n puis en déduire $V(A_n)$.
(f) En utilisant la question (3d), justifier sans aucuns calculs que

$$\rho(Z_n, X_n + Y_n) = -1.$$

(4) Que représente le graphique obtenu en sortie du programme suivant ?

```
x=1:100
D=Deplacement(100)
y=cumsum(D)
plot2d(x,y)
```

Exercice 615. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilité et telles que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = i) = P(Y = i) = \frac{1}{2^i}.$$

(1) Reconnaître les lois de X et Y.
(2) Déterminer la loi de $Z = X + Y$ ainsi que la loi de X conditionnellement à $[Z = k], k \geq 2$.
(3) Calculer $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.
(4) Calculer $P(X \geq 2Y)$ et $P_{[X>Y]}(X \geq 2Y)$.

Exercice 616. (D'après **ECRICOME 2016**)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\{1, ..., N\}$. On dit que X et Y sont *échangeables* si, pour tous entiers $i, j \in \{1, ..., N\}$

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P((X = j) \cap (Y = i)).$$

(1) Montrer que si X et Y sont échangeables, alors elles suivent la même loi.
(2) Montrer que si X et Y sont indépendantes et de même loi, alors elles sont échangeables.

(3) L'exemple suivant vise à montrer que la réciproque est fausse. Soient n, b, c trois entiers strictement positifs. Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On pioche une boule dans l'urne. On définit une première variable aléatoire X comme suit. Si la boule est est noire, alors $X = 1$ sinon $X = 2$.
(a) Écrire en langage `SciLab`, une fonction `tirage(n,b)` simulant la variable X.
(b) Déterminer la loi de X.

On remet la boule tirée dans l'urne ainsi que c boules supplémentaires de la couleur tirée. On tire une seconde boule et on introduit la variable aléatoire Y qui vaut 1 si la nouvelle boule tirée est noire et 2 sinon.

(c) Déterminer la loi de Y.
(d) Montrer que X et Y sont échangeables.
(e) Sont-elles indépendantes?

Exercice de CB n°3, Automne 2019

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, **sans remise**, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : "le i-ème tirage donne une boule blanche", et on pose $\overline{B_i} = N_i$. Enfin, on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

Partie I - Simulation informatique

(1) Compléter la fonction `SciLab` suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et renvoie les valeurs prises par les variables X et Y.
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
function [x,y]=XY(n)
nB=n-1
x=1
y=................
u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
        nB=...........
        if u==1 then y=..............
        end
        u=grand(1,1,'uin',1,........)
        x=.............
end
endfunction
```

(2) On génère un échantillon de taille 1000 du couple (X, Y). Compléter le script suivant afin de calculer la covariance empirique de l'échantillon obtenu.

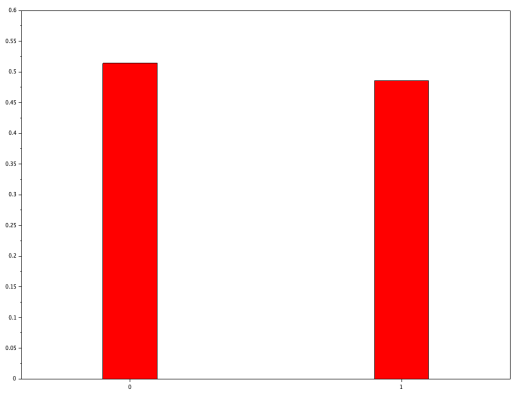
```
n=input('n=?')
X=zeros(1, 1000);
Y=zeros(1, 1000);
for k=1:1000
    [X(k), Y(k)]=XY(n)
end
covXY=mean(............................)
disp(covXY)
```

(3) En rentrant $n = 4$, le programme affiche `0.449475`. Que peut-on conjecturer?

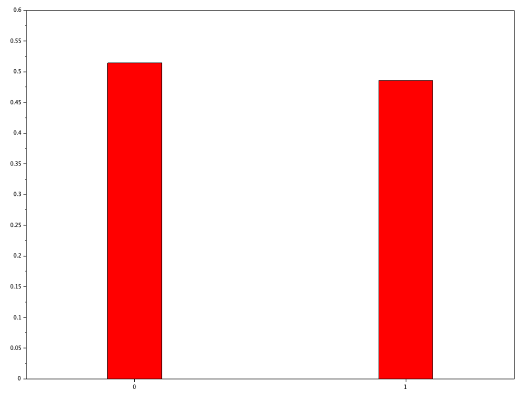
(4) On remplace les deux dernières lignes du programme précédent par le script suivant que l'on exécute successivement pour $n = 4$, $n = 5$, $n = 10$ et $n = 50$.

```
T=tabul(Y, 'i');
T(:,2)=T(:,2)/1000;
bar(T(:,1), T(:, 2), width=0.2, 'red')
```

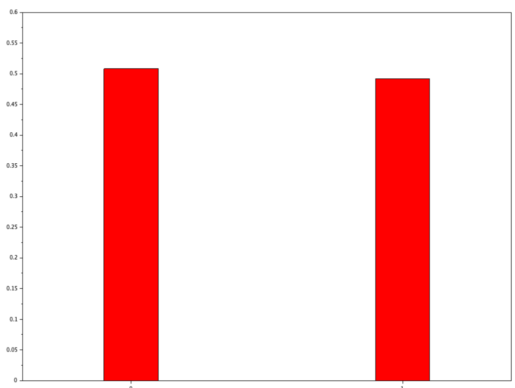
`SciLab` affiche alors respectivement les quatre figures ci-dessous



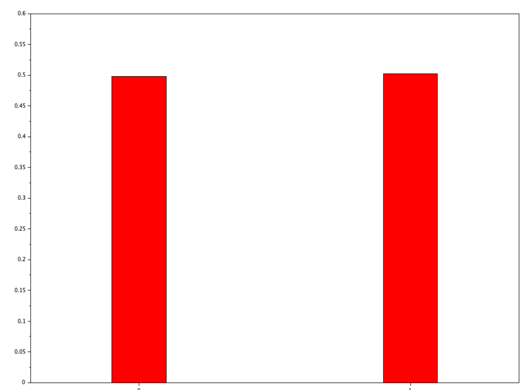
$n = 4$



$n = 5$



$n = 10$



$n = 50$

Que peut-on alors conjecturer quant à la la loi de Y?

Partie II - Loi conjointe de X et Y

(5) Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

(6) (a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que

$$P_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}.$$

(b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

(c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

(7) (a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que

$$P\Big([X = k] \cap [Y = 0]\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}.$$

(b) En déduire $P(Y = 0)$ puis $P([X = k] \cap [Y = 1])$.

(c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

(d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Partie III - Un calcul de covariance

(8) (a) On considère deux nombres entiers naturels k et n tels que $n \geqslant k$. Rappeler le lien entre les nombres

$$\binom{k}{j}, \qquad \binom{k+1}{j+1} \quad \text{et} \quad \binom{k}{j+1}.$$

(b) Établir alors la formule suivante:

$$\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} = \binom{n+1}{j+1}$$

(c) En faisant $j = 2$, en déduire une expression factorisée de la somme suivante:

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1).$$

(9) Montrer que

$$E(XY) = \sum_{k=1}^{n} kP([X=k] \cap [Y=1]) = \frac{n+1}{3}.$$

(10) En déduire la valeur de $\operatorname{cov}(X, Y)$.

Un (autre) problème d'annales

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On extrait de cette urne successivement et **sans remise** 2 jetons et on désigne alors par:

- N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré
- N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré.
- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés.
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

Partie I - Calculs préliminaires

(1) On considère deux nombres entiers naturels k et n tels que $n \geqslant k$. Rappeler le lien entre les nombres

$$\binom{j}{k}, \qquad \binom{j+1}{k+1} \quad \text{et} \quad \binom{j}{k+1}.$$

(2) Établir alors la formule suivante:

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

(3) En faisant $k = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des quatre sommes suivantes:

$$\sum_{j=1}^{n} j; \qquad \sum_{j=2}^{n} j(j-1) \quad et \quad \sum_{j=1}^{n} j^2; \qquad \sum_{j=3}^{n} j(j-1)(j-2).$$

Partie II - Lois conjointe et marginales des variables N_1 et N_2

(4) Déterminer la loi de N_1.

(5) Pour $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, déterminer, en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$, les probabilités

$$P([N_1 = i] \cap [N_2 = j]).$$

(6) En déduire la loi de N_2.

(7) Calculer les espérances $E(N_1)$ et $E(N_2)$, les variances $V(N_1)$ et $V(N_2)$.

(8) Montrer que

$$E(N_1 N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2.

(9) Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $V(N_1 + N_2)$.

Parie III - Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables aléatoires X et Y

(10) Déterminer la loi du couple (X, Y).
(11) En déduire les lois marginales de X et Y.
(12) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{Y=j}(X = i)$ et $P_{X=i}(Y = j)$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, puis reconnaître la loi de X conditionnée par $Y = j$ et la loi de Y conditionnée par $X = i$.
(13) Comparer les lois des variables aléatoires $n + 1 - X$ et Y, autrement dit les deux probabilités $P(n + 1 - X = j)$ et $P(Y = j)$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$.
(14) En déduire que $E(n + 1 - X) = E(Y)$ et $V(n + 1 - X) = V(Y)$, puis en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

Partie IV - Espérances et variances des variables aléatoires X et Y

(15) Exprimer les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de n.
(16) Exprimer sous forme factorisée $E[(Y(Y - 2)]$, puis $E(Y^2), V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n.

Partie IV - Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

(17) Vérifier que $X + Y = N_1 + N_2$, puis en déduire sous forme factorisée la variance de $X + Y$ et la covariance de X et Y.
(18) En déduire le coefficient de corrélation de X et Y.
On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.

Partie V - Simulation informatique

(19) On donne le programme suivant, renvoyant une simulation du couple (N_1, N_2). Expliquer comment est simulée la variable aléatoire N_2, en précisant notamment que ce représente, pour l'expérience, la variable `U`.

```
function N=tirage(n)
    U=1:n
    N(1)=grand(1,1,'uin', 1, n);
    if N(1)<>n then
        for i=N(1):n-1
            U(i)=U(i+1)
        end
    end
    N(2)=U(grand(1,1,'uin', 1, n-1))
endfunction
```

(20) Compléter les lignes suivantes qui, ajoutées à la fin du programme précédent, permettent de simuler les variables Z et T

```
n=input('n=?')
T=..............
Z=..............
```