ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 9. Réduction des endomorphismes

Dans différents exercices d'algèbre linéaire, on a déjà pu observer qu'un endomorphisme pouvait être représenté, dans des bases différentes, par des matrices différentes et dans certains cas des matrices plus "simples" ou plus "pratiques" pour le calcul, notamment par des matrices diagonales.

En effet, si A et D représentent l'endomorphisme f de E dans deux bases de E, notées respectivement $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors les matrices A et D sont semblables, le lien entre les deux matrices fait intervenir la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$

$$A = PDP^{-1}$$

ce qui implique[1] alors que , pour tout $k \in \mathbb{N}$ (et même $k \in \mathbb{Z}$ si f est un automorphisme)

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

et si D est diagonale, ses puissances se calculent très facilement

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

L'objectif de ce chapitre est, partant d'un endomorphisme f (ou d'une matrice A) de trouver, **si possible**, une base (et donc une matrice de passage) dans laquelle la matrice de f sera diagonale.

On peut procéder par analyse du problème; si $\mathcal{B}_2 = \{\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n\}$ est la base dans laquelle la matrice de f est la matrice diagonale D ci-dessus, alors, par définition de ce qu'est la matrice d'un endomorphisme dans une base, on a , pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$f(\epsilon_i) = \lambda_i \epsilon_i.$$

Ainsi, un vecteur d'une base dans laquelle l'endomorphisme est représenté par une matrice diagonale est nécessairement envoyé sur un multiple de lui-même.

Un vecteur d'une base étant nécessairement un vecteur non nul, on va donc être ramené à chercher, l'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$, pour lesquelles il existe des vecteurs non nuls $u \in E$ (qu'il faudra ensuite déterminer) vérifiant

$$f(u) = \lambda u.$$

Autrement dit, pour quelles valeurs de λ a-t-on

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}?$$

[1] par une récurrence qu'il faut savoir faire

1 Éléments propres d'un endomorphisme

Dans toute cette section E est un espace vectoriel de dimension finie et f est un endomorphisme de E.

1.1 Les définitions à connaître

Définition 1. *(Éléments propres d'un endomorphisme)*

- *Un réel λ est une **valeur propre** de f, s'il existe un vecteur **non nul** $u \in E$ tel que $f(u) = \lambda u$.*
- *Le vecteur u est alors appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.*
- *L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le **spectre** de f et se note $Sp(f)$.*

Exercice 1. Déterminer le spectre de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par son action sur la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$

$$f(e_1) = f(e_2) = e_1 + e_2.$$

Il découle quasiment immédiatement de la définition le résultat suivant.

Théorème 1. *Soient f un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) λ est valeur propre de f;
(2) Il existe un vecteur non nul $u \in E$ tel que $f(u) = \lambda u$;
(3) $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$;
(4) $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif

☞ **Déterminer le spectre** de f revient donc à déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, le système d'équations $f(u) = \lambda u$ (ou de manière équivalente $f(u) - \lambda u = 0$) a des solutions autres que le vecteur nul, c'est à dire

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } f \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}. \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Mat}(f - \lambda \mathrm{Id}, \mathcal{B}) \text{ non inversible} \qquad (\text{où } \mathcal{B} \text{ base de } E) \end{aligned}$$

Remarque 1. Lorsque l'endomorphisme f n'est pas un automorphisme (*i.e.* lorsqu'il n'est pas injectif - ni surjectif, ni bijectif), alors $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul et 0 est alors valeur propre de f.

Définition 2. *Soient f un endomorphisme de E et $\lambda \in Sp(f)$. Le **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ est le sous-espace*

$$E_\lambda = \{u \in E : \; f(u) = \lambda u\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

☞ Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est donc l'ensemble composé de tous les vecteur propres associé à λ **ainsi que** du vecteur nul.

Exercice 2. Déterminer les sous-espaces propres de l'endomorphisme de l'Exercice **??**.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = P + P'$. Déterminer le spectre de f et les sous-espaces propres de f.

1.2 Premières propriétés

Théorème 2. *Soient f un endomorphisme de E et $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres **distinctes**. Pour $i \in \{1, 2, ..., p\}$, on note E_{λ_i} le sous-espace propre associé à λ_i et $\mathcal{B}_i$ une base de celui-ci. Alors*

(1) $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_p$ est une famille libre de E
(2) En particulier, si $u_i \in \mathcal{B}_i$, alors $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est une famille libre de E.

Le théorème précédent affirme que la *concaténation* de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres **distinctes** forme une famille libre de E.

☞ Une famille formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres **dinstinctes** est une famille libre de E.

Il en découle le corollaire important suivant.

Corollaire 1. Soit f un endomorphisme de E, avec $\dim(E) = n$. Alors

(1) f possède au plus n valeurs propres distinctes;
(2) La somme des dimensions des sous-espaces propres de f ne dépasse pas n:

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) \leq n.$$

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $e_1 + e_2$ est un vecteur propre de f. En déduire, sans calcul supplémentaire, le spectre de f puis une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de f. Quelle est alors la matrice de f dans cette base?

1.3 Polynôme (annulateur), valeurs propres et spectre

Si f est un endomorphisme de E, on note $f^k = f \circ f \circ ... \circ f$ (k fois) et $f^0 = \mathrm{Id}_E$. On rappelle aussi que, si P est un polynôme, disons $P(X) = a_p X^p + ... a_2 X^2 + + a_1 X + a_0$, alors $P(f)$ est l'endomorphisme de E défini par $P(f) = a_p f^p + ... + a_2 f^2 + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E$.

Proposition 1. Soient f un endomorphisme de E, λ une valeur propre de f et u un vecteur propre associé à λ. Alors, par une petite récurrence immédiate

(1) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $f^k(u) = \lambda^k u$.
(2) Pour tout polynôme P, on a $P(f)(u) = P(\lambda)u$.

☞ Une reformulation du (2) est que tout vecteur propre de f associé à λ est un vecteur propre de $P(f)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

Il découle de la proposition précédente le résultat suivant, qui sera très utile pour déterminer des "candidates" possibles pour les valeurs propres d'un endomorphisme.

Théorème 3. *Soient f un endomorphisme de E et $P(X)$ un polynôme annulateur de f (c'est à dire que $P(f) = 0$). Alors, le spectre de f est contenu dans l'ensemble des racines de P. Cette inclusion peut être* ***stricte****.*

☞ La dernière phrase du résultat précédent précise que certaines racines de P pourraient ne pas être valeurs propres de f. Pour qu'une racine de P soient valeur propre, il faut donc vérifier qu'elle admette (au moins un) vecteur propre (non nul, naturellement).

Exercice 5. (D'après **ECRICOME 2017**) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $(A - I)^2$ puis $(A - I)^3$. En déduire un polynôme annulateur de f.
(2) Déterminer le spectre de f.

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $X^2(X - 1)$ est un polynôme annulateur de f.
(2) Déterminer le spectre de f. Qu'illustre cet exemple?

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (-y, x)$. Vérifier que $f^2 = -\mathrm{Id}$ puis, en déduire que f n'admet aucune valeur propre.

Exercice 8. (Extrait de **HEC 2015**) Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, ..., v_n$ dans la base $\mathcal{B}$ et qui vérifie

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1.$$

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe le vecteur $f(x)$ défini par :

$$f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
(2) Montrer que $f \circ f = f$. En déduire un polynôme annulateur P de degré 2 de f.
(3) Déterminer les racines de P et en déduire des candidates potentielles pour les valeurs propres de f.
(4) Montrer que $f(v) = 0$ et que $f(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$. En déduire le spectre de f.

2 Endomorphismes diagonalisables

Définition 3. *Un endomorphisme f de E est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E constituée uniquement de vecteurs propres de f.*

La matrice de f dans cette base de vecteurs propres est alors diagonale.

☞ **Diagonaliser** un endomorphisme revient donc à trouver une base de vecteurs propres, c'est à dire commencer par trouver l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme puis déterminer si chaque sous-espace propre a "la bonne dimension", *i.e.* permet de fournir le bon nombre de vecteurs propres.

Exercice 9. Diagonaliser l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par son action sur la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$f(e_1) = e_1 + e_3, \quad f(e_2) = e_2 - e_3, \quad f(e_3) = 2e_3.$$

⚠ **Attention!** Tous les endomorphismes ne sont pas toujours diagonalisables (loin de là).

Exercice 10. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que le spectre de f est réduit à $\{1\}$.
(2) Justifier alors, sans calcul, qu'il ne peut exister de base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 11. L'endomorphisme f de l'Exercice **??** (**ECRICOME 2017**) est-il diagonalisable?

2.1 Conditions pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable

Théorème 4. *(Une condition **suffisante** de diagonalisation)*
Soit f un endomorphisme de E, avec $dim(E) = n$. Si f possède n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

☞ Auquel cas, **tous** les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.
⚠ **Attention!** La réciproque est fausse. L'endomorphisme f peut être diagonalisable en ayant moins de valeurs propres que sa dimension et donc avec des sous espaces propres de dimension strictement supérieure à 1.

Théorème 5. *(Une condition **nécessaire et suffisante** de diagonalisation)*
Soit f un endomorphisme de E, avec $dim(E) = n$. Alors, f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n:

$$f \quad diagonalisable \quad \Longleftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(f)} dim(E_\lambda) = n.$$

Ce résultat permet de définir la marche à suivre classique dans la réduction d'un endomorphisme.

✎ **Méthode.** (Diagonalisation d'un endomorphisme) Soit f un endomorphisme de E.

(1) On détermine le spectre de f (en résolvant un système à paramètre ou éventuellement à l'aide d'une propriété propre à l'endomorphisme). On pourra aussi trouver les valeurs de λ pour lesquelles, si A est la matrice de f dans une certaine base, $A - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas inversible.

(2) On détermine une base de chaque sous-espace propre associé à chaque valeur propre du spectre.

(3) ☞ Si la somme des dimensions des sous-espaces propres précédents est égale à la dimension de E, l'endomorphisme est diagonalisable.
Une base de vecteur propre est obtenue en réunissant les vecteurs de chaque base des sous-espaces propres.
La matrice dans la base de vecteurs propres est la matrice dont la diagonale est formée des valeurs propres, éventuellement répétées un nombre de fois correspondant à la dimension du sous-espace propre associé.

☞ Sinon, l'endomorphisme n'est pas diagonalisable.
Parfois, le problème peut alors proposer une résolution visant à "simplifier" autrement l'endomorphisme (par exemple en trouvant une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme sera triangulaire supérieure).

3 Éléménents propres d'une matrice. Matrices diagonalisables

Via l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut associer tout endomorphisme à une matrice et réciproquement. Il suit alors naturellement que les définitions et propriétés précédentes s'adaptent et se reformulent directement en s'appliquant aux matrices carrées.

3.1 Définitions et propriétés

Dans toute la suite, A désigne une matrice (carrée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I désigne la matrice identité du même espace.

Définition 4. *(Éléments propres d'une matrice carrée)*

- *Un réel λ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$.*
- *La matrice colonne X est appelée **vecteur colonne propre** de A associée à la valeur propre λ.*
- *L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le **spectre** de A et se note $\mathrm{Sp}(A)$.*

Théorème 6. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) λ est valeur propre de A;
(2) Il existe une matrice colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = \lambda X$;
(3) La matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

Remarque 2. En particulier, le fait que A soit inversible est équivalent au fait que 0 **ne soit pas** valeur propre.

Proposition 2. (Spectre d'une matrice triangulaire) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

☞ On pourra ainsi, pour trouver les valeurs propres d'une matrice, effectuer un pivot de Gauss, dont les étapes donnent des matrices semblables, jusqu'à obtenir une matrice triangulaire dont la diagonale nous donnera les informations cherchées.

Exercice 12. Démontrer le résultat précédent.

Définition 5. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in Sp(A)$. Le* ***sous-espace propre*** *de A associé à la valeur propre λ est le sous-espace*

$$E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ AX = \lambda X\}.$$

Théorème 7. *(Lien avec les endomorphismes) Soient E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est notée A (et est donc un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,*

(1) f et A ont le même spectre;
(2) Soit $\lambda \in Sp(f)$.

(a) Si $u \in E$ a pour coordonnées dans $\mathcal{B}$ la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$u \text{ vecteur propre de } f \text{ associé à } \lambda \iff X \text{ vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda.$$

(b) Le sous-espace propre de f associé à λ a la même dimension que le sous-espace propre de A associé à λ:

$$dim(\{u \in E : \quad f(u) = \lambda u\}) = dim(\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \quad AX = \lambda X\}).$$

Corollaire 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

(1) A a au plus n valeurs propres distinctes;
(2) La somme des dimensions de ses sous-espaces propres ne dépasse pas n.

Corollaire 3. Deux matrices semblables ont le même spectre.

Comme pour les endomorphismes, on a également un lien entre polynômes (annulateurs) de matrices et valeurs propres.

Proposition 3. (Polynomes et valeurs propres) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme. Alors,

(1) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et X vecteur colonne propre associé à λ, alors $P(A)X = P(\lambda)X$.
(2) Toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A.

☞ Comme précédent, cette proposition peut permettre de déterminer le spectre. Attention cependant, toujours comme précédent toute racine d'un polynôme annulateur n'est pas forcément valeur propre de la matrice.

3.2 Matrices diagonalisables

Définition 6. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* ***diagonalisable*** *si elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit, s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.*

☞ **Diagonaliser** une matrice A, c'est trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

Pour cela, on prendra pour P une matrice dont les colonnes seront, si c'est possible, des vecteurs colonnes propres de A formant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.3 Conditions pour qu'une matrice soit diagonalisable

Théorème 8. *(Une condition* ***suffisante*** *de diagonalisation)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A possède n valeurs propres ***distinctes****, alors A est diagonalisable.*

☞ Auquel cas, **tous** les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

⚠ **Attention!** Encore une fois, la réciproque est fausse.

Le résultat suivant permet de faire un bilan des différentes propriétés.

Théorème 9. *(Des conditions* ***nécessaires et suffisantes*** *de diagonalisation). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) A est diagonalisable;
(2) A est semblable à une matrice diagonale;

(3) la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n;
(4) Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs colonnes propres de A;
(5) A est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 13. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que 10 est valeur propre de M.
(2) Montrer, sans calcul supplémentaire, que M est diagonalisable.

Exercice 14. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure M dont tous les éléments diagonaux sont tous égaux (à λ) est diagonalisable si et seulement si $M = \lambda I$.

3.4 Matrices symétriques

On rappelle qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée: ${}^tA = A$.

Dans le cas des matrices symétriques, on peut conclure en citant le résultat ci-dessous et sans autre forme de procès.

Théorème 10. *Toute matrice symétrique est diagonalisable.*

4 Applications

Une des applications principale de la diagonalisation est le calcul des puissances d'une matrice qu'on peut être notamment amené à vouloir calculer dans le cadre de suites récurrentes croisées.

Exercice 15. (Inspiré de **EML 1993**) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer les valeurs propres de A. (On les notera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.)
(2) En déduire, sans autre calcul, les réponses aux questions suivantes.
  (a) A est-elle diagonalisable ?
  (b) A est-elle inversible ?

(3) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.
(4) Expliciter une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

(5) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, explicitement la matrice A^n.
(6) **Application**. On considère les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par la donnée de leurs premiers termes u_0, v_0, w_0 et par les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n - w_n \\ v_{n+1} & = & v_n \\ w_{n+1} & = & -u_n + 2v_n + w_n \end{cases}$$

Exprimer le terme général, en fonction de n de chacune des trois suites.

5 Autres exercices

Exercice 901. (D'après **ECRICOME 2010**) Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la fonction polynômiale Q qui à tout réel x associe le réel :

$$Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a.$$

Partie I. Recherche des valeurs propres de f_a.

(1) Montrer que le réel λ est une valeur propre de f_a si et seulement si λ est racine du polynôme Q.
(2) Vérifier que le réel $\lambda = 1$ est racine de Q.
(3) En déduire les racines de Q ainsi que leur nombre en fonction de a.
(4) Lorsque $a = 1$, l'endomorphisme f_1 est-il diagonalisable ?

Partie II. Réduction de la matrice M_a.

Dans toute la suite de l'exercice on suppose $a \neq 1$.

Soit $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ la famille de vecteurs de E définie par

$$\begin{cases} e_1' = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e_2' = e_1 + e_2 + e_3 \\ e_3' = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

(1) Prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de E. On note P_a la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
(2) Montrer que e_1' est un vecteur propre de f_a.
(3) Vérifier que le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs e_2' et e_3' est stable par f_a c'est-à-dire :

$$f_a(F) \subset F$$

(4) Donner l'expression de la matrice T_a de l'endomorphisme f_a dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.
(5) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie III. Etude d'une suite récurrente linéaire.

Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par ses premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 0$ et par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n.$$

(1) Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

(2) Établir par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

(3) Donner l'expression matricielle de la matrice inverse de P_2 puis exprimer u_n en fonction de n.
(4) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 902. (D'après **EML 2007**) On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.
(2) Calculer $4A^3 - 3A$. En déduire un polynôme P annulateur de A.
(3) Calculer $P(1)$. En déduire une racine de P puis, par division euclidienne de P par $X-1$ les autres racines de P.
(4) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P, de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, telles que $A = P\ D\ P^{-1}$. Calculer P^{-1}.
(5) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n par ses éléments.
(6) Soient $u_0,\ v_0,\ w_0$ trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. On note

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = A\ X_{n-1}$.

(a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$
(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3} + \left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \dfrac{1}{3} + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \dfrac{1}{3} + \left(w_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}.$$

(c) Déterminer les limites respectives $u,\ v,\ w$ de $u_n,\ v_n,\ w_n$ lorsque le nombre entier n tend vers l'infini.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}.$$

(d) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
(e) Déterminer un entier naturel n tel que : $d_n \leq 10^{-2}$.

Exercice 903. (D'après **EDHEC 2016**)

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et I la matrice identité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

(2) (a) En déduire la seule valeur propre de A.
(b) La matrice A est-elle inversible? Est-elle diagonalisable?

(3) Déterminer une base $\{u_1, u_2\}$ du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

(4) (a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Vérifier que la matrice T de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.
(c) En écrivant $T = 2I + N$, exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

(5) (a) Expliquer pourquoi on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I.$$
(b) Utiliser le polynôme annulateur de la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.
(c) Vérifier que la formule trouvée à la question $(5a)$ reste valable pour $n = -1$.

Exercice 904. (D'après **EDHEC 2015**) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, puis donner une base de $Ker(f)$.

(2) On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

(a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.
(b) En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.
(c) Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.

(3) (a) Établir la relation suivante : $D(D + I)(D - 3I) = 0$.
(b) En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C.

(4) On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n, b_n et c_n tels que :
$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n.$$

(a) En utilisant les racines de P, déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
(b) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout entier naturel n non nul, de C^n en fonction de C et C^2.

Exercice 905. (D'après **EML 2016**).

On note I et A les matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \ ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

(1) Calculer A^2.
(2) Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
(3) (a) Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
  (b) Déterminer une matrice P de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.
(4) Montrer : $A^3 = 2A$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

(5) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
(6) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

(7) Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.
(8) Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.
(9) (a) Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.
  (b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie $\lambda^3 = 2\lambda$.
  (c) Déterminer alors le spectre de f et ses sous-espaces propres. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
(10) L'endomorphisme f est-il bijectif?
(11) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 906. (D'après **EDHEC 2018**) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

(1) Vérifier que A n'est pas inversible.

(2) Déterminer les valeurs propres de la matrice A, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = AM$$

(3) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(4) (a) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et vérifier que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2.
  (b) En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
  (c) On note (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$ et $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de E_1,E_2,E_3 et E_4 , puis donner une base de $\text{Im}(f)$.

(5) (a) Déterminer l'image par f des vecteurs de base de $\mathrm{Im}(f)$.
(b) Donner les valeurs propres de f puis conclure que f est diagonalisable.

(6) *Généralisation:* f est est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que f et A possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

(a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
Justifier que $X\,{}^tX$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de f.
En déduire que λ est valeur propre de f.

(b) Soit λ une valeur propre de f et M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de f associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que λ est valeur propre de A.

Exercice 907. (D'après **EDHEC 2020**) On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

(1) Montrer que $g_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe:

$$f(M) = \left({}^tA\right) M + MA$$

(2) (a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
(b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) On considère les trois matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
(b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

(4) (a) Calculer $f(J), f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
(b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$
(c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

(5) (a) Écrire la matrice F de f dans la base B. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$
(b) En déduire les valeurs propres de f
(c) On note Im l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \mathrm{Id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Exercice 908. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} V(X) & \mathrm{cov}(X, Y) \\ \mathrm{cov}(Y, X) & V(Y) \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier que A est diagonalisable.
(2) Montrer que les valeurs propres de A sont positives ou nulles.

Exercice 909. Soient $m > 0$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Exprimer M^2 en fonction de M et I_3.
(2) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

Exercice 910. (D'après **HEC 2016**)

Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM \in \mathcal{M}p, n(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.

On identifie les ensemble $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient. On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_p$ celle de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})(q \in \mathbb{N}^*)$, *on admet* que ${}^t(MN) = {}^tN{}^tM$.

(1) Soit X une matrice colonne non nulle donnée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathcal{B}_n$. On pose $A = X{}^tX$ et $\alpha = {}^tXX$.
  (a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Justifier que A est diagonalisable.
  (b) Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}_n$. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$; donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
  (c) Calculer la matrice AX. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

(2) On suppose que n et p vérifient: $1 \leq p \leq n$. Soit $\{V_1, V_2, ..., V_p\}$ une famille libre de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note V la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont dans cet ordre $V_1, V_2, ..., V_p$. Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.
  (a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.
  (b) Soit Y une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.
  (c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

6 Décomposition de Dunford, d'après ECRICOME 2011

On dit qu'une matrice A carrée de taille n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que :

$$A^{k-1} \neq 0_n \quad \text{et} \quad A^k = 0_n,$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n. Soit A une matrice carrée de taille n, on dit que le couple (Δ, N) est une *décomposition de Dunford* de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est un matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

(1) On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) (a) Déterminer les valeurs propres de A.

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(3) On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer les produits ΔX_1, ΔX_2 et ΔX_3.
(b) Justifier que la matrice Δ est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}\Delta P = D$.

(4) (a) Établir que N est une matrice nilpotente.
(b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.
(c) En utilisant une formule bien connue, donner l'expression de A^n en fonction des puissances de Δ, de N et de n.
(d) Établir que, pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\Delta^k N = N$.
(e) Proposer une décomposition de Dunford de A^n.

7 Une chaîne de Markov

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à 2.

Partie I - Étude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \quad \text{et} \quad P_2(x) = x^2.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
(2) Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ? f est-il un automorphisme de E ?
(4) Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x - 1 \quad \text{et} \quad R_2(x) = (x-1)^2$$

(5) Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
(6) Vérifier que pour tout réel x :

$$\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$

En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
(7) Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$

et expliciter la troisième colonne de la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$.

Partie II - Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.

On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve. On note alors U_k la matrice uni colonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P\left[X_k = 0\right] \\ P\left[X_k = 1\right] \\ P\left[X_k = 2\right] \end{pmatrix}$$

où $P\left[X_k = j\right]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer la loi de X_2 puis calculer l'espérance et la variance de X_2.

(2) Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$U_{k+1} = A^{-1}U_k.$$

(3) Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0.

(4) Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k\to+\infty} P\left[X_k = 0\right] = 1, \qquad \lim_{k\to+\infty} P\left[X_k = 1\right] = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} P\left[X_k = 2\right] = 0$$

(5) Compléter le programme `SciLab` suivant afin qu'il permette de représenter graphiquement des réalisations de X_0, $X_1, ..., X_n$, où n est rentré par l'utilisateur.

```
n=input('n=?')
M=[.................................................]
X=grand(n, 'markov', M, ............ )
X=[.........,  ..........]
plot2d(0:n, X, -1)
```