ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Rappels et Compléments

Test d'admission à Paris Dauphine

Cette fiche dont le but est d'être le plus synthétique possible reprend les notions du cours de mathématiques en ECE (de manière très succincte et non exhaustive) et les complète en accord avec le résumé du programme du test d'admission à Paris Dauphine pour une entrée en L3 d'économie appliquée (parcours CPGE). Certaines notions sont rappelées sous forme d'exercices et certaines notions sont introduites par des exemples.

Partie 1 - Outils de calcul matriciel

(1) **Notions de base en algèbre linéaire**. On considère la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On introduit les trois vecteurs

$$v_1 = 2e_1 - 4e_2 + e_3, \quad v_2 = -e_1, \quad v_3 = e_2 - 2e_1.$$

(a) Montrer que $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice P de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{B}$.
(b) Déterminer le noyau et l'image de f.
(c) Écrire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{F}$.

(2) **Notion de déterminant**

On sait calculer le déterminant d'une matrice 2×2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

Sans rentrer dans des détails théoriques sur l'application linéaire déterminant (définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), on utilise la *méthode de développement* selon **une** ligne ou selon **une** colonne (au choix, selon la plus pratique - celle avec le plus de zéro) pour le calcul d'un déterminant 3×3 (ou plus généralement $n \times n$).

Par exemple, selon la première colonne

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-2) - 3 \times 12 + 0 \times (-8) \\ &= -38 \end{aligned}$$

Ou encore, selon la première ligne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \times (-2) - 0 \times 15 + 2 \times (18)$$
$$= -38$$

☞ L'identité a pour déterminant 1

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \det(I_n) = 1.$$

☞ Le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

En particulier si deux matrices sont semblables, elles ont le même déterminant: si $A = PBP^{-1}$, alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(PBP^{-1}) \\ &= \det(P)\det(B)\det(P^{-1}) = \det(B)\det(P)\det(P^{-1}) = \det(B)\det(PP^{-1}) \\ &= \det(B). \end{aligned}$$

☞ Déterminer les déterminants ci-dessous

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}, \quad (ii) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad (iii) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

☞ On note Δ_n le déterminant de taille n suivant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Montrer que $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$. En déduire la valeur de Δ_n.

(3) **Déterminant - Inversibilité - Valeurs propres**

☞ Le déterminant permet de caractériser l'inversibilité

$$A \text{ inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

☞ Le determinant sert à trouver les valeurs propres. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\iff A - \lambda I_n \text{ non inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ racine du polynôme } \det(A - XI_n) \end{aligned}$$

☞ Le polynome $\det(A - XI_n)$ s'appelle le **polynôme caractéristique** de A. Ses racines sont les valeurs propres. C'est un polynôme annulateur de A (Théorème de Cayley-Hamilton).

☞ *Exercice.* Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer le polynôme caractéristique $P_M(X)$ de M. En déduire les valeurs propres de M.

(b) Donner une base des sous-espaces propres. La matrice M est-elle diagonalisable? Si oui, donner la forme diagonalisée.

(4) **Exemple de QCM**. Il est possible que plusieurs (ou aucune) réponses (ne) soient correctes.

(a) Parmi les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes, lesquelles sont libres?

☐ $\{(1,1,2);(0,-1,1)\}$ ☐ $\{(1,1,2);(0,-1,1),(1,0,1)\}$,
☐ $\{(1,1,2);(0,1,1),(1,0,1)\}$, ☐ $\{(1,1,2);(0,-1,1),(1,0,1),(2,1,3)\}$

(b) Le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ est égal à

☐ $\Delta = 1$, ☐ $\Delta = -1$, ☐ $\Delta = 0$

(c) Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$?

☐ $\{P \in \mathbb{R}_2[X] :\ P(2) = 0\}$, ☐ $\{P \in \mathbb{R}_2[X] :\ P' = 0\}$, ☐ $\{P \in \mathbb{R}_2[X] :\ P(3)^2 = 1\}$

(d) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ défini par $u : P \mapsto (X^2-1)P''$. La matrice de u dans la base canonique est donnée par

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 20 \end{pmatrix}$.

(e) Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est

☐ $P(X) = (3-X)(1-X)^2$, ☐ $P(X) = (X-2)^2$, ☐ $P(X) = (3-X)(1-X)^2 - (1-X)$.

(f) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et $\mathrm{rg}(f^2) = 1$. Parmi les ensembles suivants, lesquels pourraient-être le spectre de f?

☐ $\sigma = \{0;1;-1\}$, ☐ $\sigma = \{-1;1\}$, ☐ $\sigma = \{0,1\}$, ☐ $\sigma = \{0\}$.

(g) Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies?

☐ La somme de deux matrices diagonalisables est une matrice diagonalisable.
☐ Si A est une matrice inversible diagonalisable, alors A^{-1} est diagonalisable.
☐ Si A est diagonalisable, alors A^2 aussi.

☐ La matrice A ci-dessous est diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Partie 2 - Analyse. Géométrie de $\mathbb{R}^2$. Calcul différentiel. Optimisation

(1) **Fonctions d'une variable.** On étend la formule de Taylor. Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un ouvert $I \subset \mathbb{R}$, alors, pour tout $a \in I$, on a, au voisinage de a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Écrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0. Donner la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point du graphe d'abscisse 0. Faire une représentation graphique sommaire de la courbe représentative de g au voisinage de $(0, g(0))$.

(b) Soit h la fonction de définie sur$]-1;+\infty[$ par $h(x) = (\ln(1+x))^2$. Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]-1;+\infty[$. Écrire le développement limité à l'ordre 3 en 0.

(c) On considère la fonction f définie sur $D =]-1;0[\cup]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{h(x) - x^2}{x - g(x)}$$

Montrer que f admet une limite en 0.

(2) **Géométrie de $\mathbb{R}^2$.** Représenter géométriquement les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ et donner leur *nature topologique* (ouvert, fermé). Sont-ils bornés? On demande juste une **réponse intuitive** sans justification.

$$(i)\ A = \{(1,1), (-1,-1), (0,0)\}, \quad (ii)\ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 4 \leq x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 \leq 25\},$$

$$(iii)\ C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 - 2x - 3 < 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 2y - 3 < 0\},$$

$$(iv)\ D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad (v)\ E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ -1 \leq x \leq 1, 0 < y < 2\}.$$

(3) **Géométrie dans $\mathbb{R}^2$. Convexité.** Une partie C de $\mathbb{R}^2$ est dite *convexe* si tout segment reliant deux points de C est inclus dans C. Plus précisément si

$$\forall A, B \in C,\ \forall \theta \in [0;1], \quad \theta A + (1-\theta)B \in C.$$

Représenter géométriquement les sous-ensembles suivants. S'agit-il de parties convexes de $\mathbb{R}^2$? (Comme précédemment, on attend une réponse intuitive).

$$(i)\ E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y > |2x+3|\}, \qquad (ii)\ E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 - x + y + 14 < 0\},$$

$$(iii)\ E_3 = ([0;1] \cup [2;1]) \times [1;2], \qquad (iv)\ E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x + y > 0, -1 < x < 1, -1 \leq y \leq 2\}.$$

(4) **Fonctions de deux variables. Extrema libres**. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que les extrema locaux trouvés ne sont pas des extrema globaux.

$$(i)\ f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \qquad (ii) g(x,y) = x^4 + y^3 - 4y - 2,$$

$$(iii)\ h(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3.$$

(5) **Fonctions de deux variables. Optimisation sans contrainte**. Un industriel produit simultanément 2 biens A et B dont il a le monopole de la production et de la vente dans un pays. Soit x la quantité produit du premier bien et y la quantité produite du second. Les prix p_A et p_B auxquels il vend les bien A et B sont fonction des quantités écoulées selon les relations:

$$\begin{cases} p_A &= f(x) \\ p_B &= g(y) \end{cases}$$

Le coût de production total des quantités x et y est une fonction $c(x, y)$. Le Bénéfice de l'entreprise si elle vend les quantités x et y est donc la fonction

$$\pi(x, y) = xf(x) + yg(y) - c(x, y)$$

Dans chacun des cas suivants, trouvez les quantités qui maximisent le bénéfice de l'entreprise, la valeur maximale du bénéfice ainsi que les prix de vente de chacun des biens

$$(i) \begin{cases} p_A &= 1 - x \\ p_B &= 1 - y \\ c(x, y) &= xy \end{cases}, \qquad (ii) \begin{cases} p_A &= 28 - 3x \\ p_B &= 22 - 2y \\ c(x, y) &= x^2 + 3y^2 + 4xy \end{cases},$$

(6) **Optimisation sous contrainte. Substitution.** Optimiser les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$, puis sous la liaison $x + y = 0$.

$$(i)\ f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3, \qquad (ii)\ g(x, y) = (x^2 + y^2) + \exp(x^2 + y^2).$$

(7) **Optimisation sous contrainte. Extrema liés. Multiplicateurs de Lagrange.**
On s'intéresse à la recherche d'extrema d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sur le domaine

$$\{(x, y) \in U : g(x, y) = 0\}.$$

(Théorème.) Soit $a \in U$. Si la fonction f admet un extremum sous la contrainte $g = 0$ en a, alors

(i) $g(a) = 0$ (a est sur la contrainte);
(ii) Ou bien $\nabla g(a) = 0$, ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

En particulier,

- Si un point a satisfait aux points (i) et (ii) du théorème, on dit que a est un point critique de f sous la contrainte $g = 0$.
- Si a est un point critique tel que $\nabla g(a) = 0$, on dit que c'est un point critique de *seconde espèce*.
- Si a est un point critique tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, on dit que c'est un point critique de *première espèce*. Dans ce cas le nombre λ est appelé *multiplicateur de Lagrange* associé à a.

☞ Comme en optimisation libre, on peut avoir un point critique qui ne corresponde à aucun extremum.

Soit a un point critique de première espèce de f sous la contrainte $g = 0$, et soit λ le multiplicateur de Lagrange associé. On définit le *Lagrangien* L_λ sur tout l'ouvert U par

$$L_\lambda(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in U$. La proposition suivante montre qu'à l'aide de la notion de Lagrangien, on ramène le problème d'optimisation sous contrainte à un problème d'optimisation libre (mais attention, la valeur de λ dépend du point critique).

(Proposition.) Dans le cas où L_λ est défini sur une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ on a que le point a est un point critique de L_λ. De plus, si L_λ admet un extremum local (ou global) en a, alors f admet un extremum local (ou global) en a sous la contrainte $g = 0$.

Par ailleurs, si K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et que f est définie sur K, alors f admet un minimum et un maximum local sur K.

Soit $f(x,y) = x^3 + y^3$, définie sur $\mathbb{R}^2$. On cherche les extrema de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. On pose donc $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, où g est définie sur $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer qu'il n'y a pas de point critique de deuxième espèce.
(b) Expliciter les points critiques de première espèce, (*on en trouve 6*) et calculer la valeur de f en ces 6 points.
(c) Déterminer la nature de ces points critiques.

Références

(1) Programme en mathématiques, test du parcours CPGE L3 Economie appliquée Paris Dauphine
`https://lso.dauphine.fr/`

(2) A. Bey, *Optimisation Libre et sous contrainte en Licence 1*, Année 2012/2013,
`https://www.ceremade.dauphine.fr/ ˜ bey/enseignement/enseignement.html`

(3) A. Bey, *Algèbre Linéaire en Licence 1*, Année 2012/2013,
`https://www.ceremade.dauphine.fr/ ˜ bey/enseignement/enseignement.html`

(4) A. Frouvelle, *Calcul différentiel et optimisation*,
`https://www.ceremade.dauphine.fr/ ˜ amic/enseignement/CD2018/calcul_diff_cours_v2.pdf`