ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Approfondissement

Autour de la notion d'indicatrice
Éléments de solution

Préambule

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A un évènement.

On appelle *variable indicatrice* de l'évènement A la variable aléatoire notée $\mathbb{1}_A$ définie par

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

(1) La variable $\mathbb{1}_A$ prend la valeur 0 ou 1; c'est donc une variable de Bernoulli. Son paramètre est égal à la probabilité de prendre la valeur 1

$$P\left(\{\omega :\ \mathbb{1}_A(\omega) = 1\}\right) = P(\{\omega :\ \omega \in A\}) = P(A).$$

En particulier,

$$E(\mathbb{1}_A) = P(A), \qquad V(\mathbb{1}_A) = P(A)(1 - P(A)).$$

(2) Soient A et B deux évènements.

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A(\omega) \cdot \mathbb{1}_B(\omega) = 1 &\iff \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \\ &\iff \omega \in A \quad \text{et} \quad \omega \in B \\ &\iff \omega \in A \cap B \\ &\iff \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 \end{aligned}$$

Ayant raisonné par équivalences, on a bien

$$\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}.$$

(3) On calcule en utilisant les deux questions précédentes

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) &= E\left(\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B\right) - E(\mathbb{1}_A)E(\mathbb{1}_B) \\ &= E(\mathbb{1}_{A\cap B}) - E(\mathbb{1}_A)E(\mathbb{1}_B) \\ &= P(A \cap B) - P(A)P(B). \end{aligned}$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On introduit la *fonction indicatrice* de I avec la formule

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I \\ 0, & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et $s \in \mathbb{R}$. On remarque alors que

$$\mathbb{1}_{[X \geq s]} = \chi_{[s;+\infty[}(X).$$

(3) On observe que
$$\mathbb{1}_{[X\geq s]}Y = \mathbb{1}_{[X\geq s]}g(X) = \chi_{[s;+\infty[}(X)g(X).$$
Ainsi, par le théorème de transfert, cette variable aléatoire admet une espérance si et seulement si l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[s;+\infty[}(x)g(x)f(x)\mathrm{d}x$$
converge.
Comme $\chi_{[s;+\infty[}(x) = 0$ si $x < s$ et 1 si $x \geq s$, cette même intégrale est égale à
$$\int_{s}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 1

(1) *Question de cours:* Inégalité de Markov.
Soit X une variable aléatoire positive (ou nulle) admettant une espérance. Alors, pour tout $t > 0$, on a
$$P(X > t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

Un fabricant cherche à optimiser le prix de vente p de son produit. Il suppose que chaque client potentiel est prêt à payer un prix aléatoire X pour acheter le produit. Si X est supérieur ou égal à p, la vente a lieu le fabricant encaisse p euros; sinon la vente n'a pas lieu et le fabricant n'encaisse aucun chiffre d'affaires.

On suppose que X admet une densité de probabilité f continue sur $\mathbb{R}_+$ et une espérance finie. On note F la fonction de répartition et Z_p le chiffre d'affaires réalisé si le prix de son produit est fixé à la valeur p et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+$ par $g(p) = E(Z_p)$.

(2) Le fabricant gagne p euros si la vente à lieu c'est à dire si $X \geq p$. Sinon, il ne gagne rien. Ainsi, clairement
$$Z_p = p \cdot \mathbb{1}_{(X\geq p)}$$
et
$$\begin{aligned} g(p) = E(Z_p) &= E(p\mathbb{1}_{(X\geq p)}) = pE(\mathbb{1}_{(X\geq p)}) \\ &= pP(X \geq p) = p\left(1 - P(X < p)\right) \\ &= p(1 - F(p)). \end{aligned}$$

(3) La fonction de répartition F tend vers 1 en $+\infty$ donc $1 - F(p)$ tend vers 0 mais on a une forme indéterminée pour le produit avec p. Il faut donc regarder avec un peu de subtilité les quantités en présence:
$$\begin{aligned} g(p) = pP(X \geq p) &= p\int_p^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_p^{+\infty} ptf(t)\mathrm{d}t \\ &\leq \int_p^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$
ce qui est l'intégrale correspondant au "reste" de l'espérance de X. En effet, on sait que X admet une espérance (et que f est nulle sur $\mathbb{R}_-$) donc
$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^p tf(t)\mathrm{d}t = E(X) = \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$$

et
$$\int_p^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = E(X) - \int_0^p tf(t)\mathrm{d}t \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Par encadrement on a bien que $g(p) \to 0,\ p \to \infty$. Ce n'était pas une question si facile!

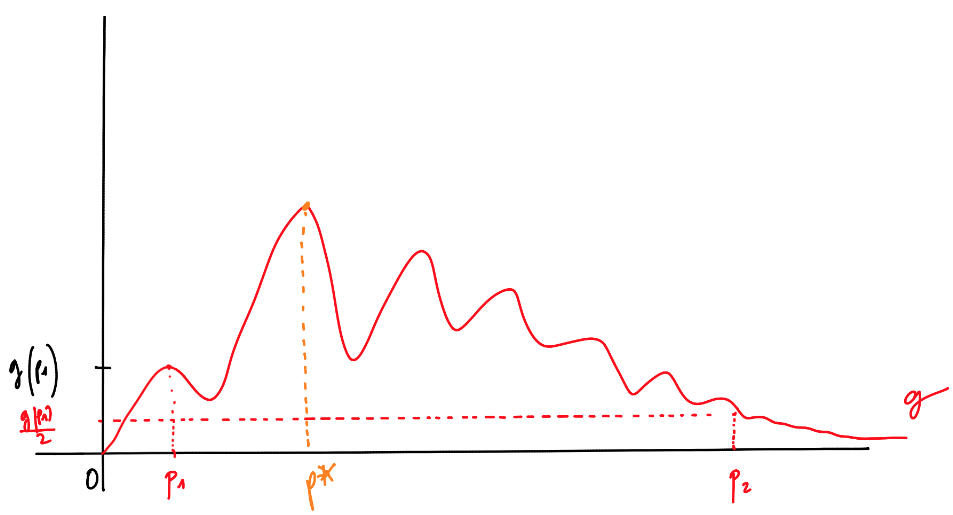
(4) On calcule
$$g(0) = 0(1 - F(0)) = 0.$$
Par ailleurs, F étant primitive de f, elle est dérivable et, produit, g aussi. On a
$$g'(p) = 1 - F(p) - pf(p).$$
On ne peut pas dire grand chose sur cette fonction dérivée; en particulier on ne peut pas trouver son signe pour en déduire des variations sur g. On raisonne donc avec des arguments plus fins et *qualitatifs*.

- Une fonction continue sur un intervalle fermé et borné atteint ses bornes et admet donc un maximum. Le problème ici est que $\mathbb{R}_+$ n'est pas un intervalle fermé et borné... Mais l'idée est de s'y ramener en disant que "à l'infini" cela tend vers 0 donc ce n'est pas là que sera le maximum.

- g est positive et non identiquement nulle. Il existe donc $p_1 > 0$ tel que $g(p_1) > 0$.

- Comme $g(p) \longrightarrow 0,\ p \to +\infty$, il existe une valeur $p_2 > p_1$ telle que,
$$\forall p \geq p_2, \qquad g(p) \leq \frac{g(p_1)}{2}.$$

- Mais alors, g est continue sur $[0; p_2]$ et admet donc un maximum sur cet intervalle en un point noté p^*. En particulier, $g(p^*) \geq g(p_1)$ et par construction, pour tout $p \in [0; p_2]$, $g(p) \leq g(p^*)$ et pour tout $p \geq p_2$, $g(p) \leq g(p_1)/2 < g(p^*)$. On a bien
$$\forall p \in \mathbb{R}_+, \qquad g(p) \leq g(p^*),$$
et g admet bien un maximum (strictement positif) sur $\mathbb{R}_+$.



(5) Naturellement, comme g présente un extremum en p^*, la dérivée de g s'annule en p^* (c'est un *point critique*). On a donc
$$p^* f(p^*) = 1 - F(p^*).$$

(6) Dans le cas de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on a, pour $p \geq 0$,

$$g(p) = pe^{-\lambda p}$$

et l'équation vérifiée par p^* est

$$e^{-\lambda p^*} = p^* \lambda e^{-\lambda p^*} \iff p^* = \frac{1}{\lambda}.$$

Le chiffre d'affaire maximal est donc l'évaluation du chiffre d'affaires g en cette valeur de p^*. Plus précisément, celui-ci vaut

$$g\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{e\lambda}.$$

Exercice 2

On étudie le jeu suivant: X_1 et X_2 étant deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$, un joueur observe d'abord X_1. S'il décide d'en rester là, il gagne la valeur observée. S'il décide de continuer, il observe et gagne X_2. On note G la v.a. correspondant au gain du joueur.

(1) Si le joueur continue systématiquement, son gain est égal à X_2 et $E(G) = E(X_2) = 1/2$ car $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$.

(2) Dans un deuxième temps, il décide de continuer et d'observer X_2 si et seulement si $X_1 \leq s$, où $s \in [0;1]$ est un seuil qu'il se fixe à l'avance.

(a) Si $X_1 < s$ (et donc $\mathbb{1}_{X_1 < s} = 1$ et $\mathbb{1}_{X_1 \leq s} = 0$) alors on continue et le gain sera égal à X_2, c'est à dire à $\mathbb{1}_{X_1<s} X_2$. Sinon, le gain sera égal à X_1 ou a $\mathbb{1}_{X_1 \leq s} X_1$. On a bien

$$G = \mathbb{1}_{X_1 \geq s} X_1 + \mathbb{1}_{X_1 < s} X_2.$$

(b) Sans difficulté

```
s=input("s=?")
G=rand( )
if G<s then  \\ si X1 < s, on rejoue
    G=rand( )
end
disp(G)
```

(c) Dans ce cas $E(G) = E(\mathbb{1}_{X_1 \geq s} X_1) + E(\mathbb{1}_{X_1 \geq s} X_1)$. Mais, X_1 et X_2 étant indépendantes, le lemme des coalitions permet d'affirmer que $\mathbb{1}_{X_1 < s}$ et X_2 sont indépendantes. Donc

$$E(\mathbb{1}_{X_1<s} X_2) = E(\mathbb{1}_{X_1<s}) E(X_2) = P(X_1 < s) E(X_2) = \frac{s}{2}.$$

De plus, par le théorème de transfert et le résultat établi en préambule,

$$\begin{aligned} E(\mathbb{1}_{X_1 \geq s} X_1) &= \int_s^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_s^2 \\ &= \frac{1 - s^2}{2}. \end{aligned}$$

Au final,

$$E(G) = \frac{1 - s^2 + s}{2}.$$

(d) On regarde où la fonction $s \mapsto 1 - s^2 + s$ est maximale. Sa dérivée vaut $1 - 2s$ et s'annule en $s^* = 1/2$ où on voit sans difficulté que $E(G)$ est maximale. Ce résultat est d'ailleurs assez intuitif. Dans ce cas, l'espérance vaut

$$E(G) = \frac{5}{8} > \frac{1}{2},$$

ce qui est donc un peu mieux que la première stratégie.

(3) Dans cette optique très avantageuse, on aurait $G = \max(X_1, X_2)$. On obtient alors $E(G)$ en déterminant la loi du max, question trèèèèèèès classique. On commence par la fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_G(x) = P(\max(X_1, X_2) \leq x) &= P([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x]) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \qquad \text{(par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2\text{)} \\ &= F_{X_1}(x)^2 \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction est bien la fonction de répartition d'une variable à densité (continue partout sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des morceaux) donc G est bien une v.a à densité. Une densité est donnée par

$$f_G(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Il suit que

$$E(G) = \int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

C'est clairement la stratégie la plus avantageuse !