(mini) Devoir surveillé n°4 - Sujet A

Mercredi 19 Janvier
Durée : 2 heures

Exercice 1

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
(b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
(c) En `SciLab`, la commande `rank(M)` renvoie le rang de la matrice M. On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,'r2=')
```

`SciLab` a renvoyé :

```
r1 =
     1.
r2 =
     2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés?
(d) Donner une base de chacun des sous-espaces propres $E_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})$ et $E_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{Id})$.

(2) (a) Déterminer, **en justifiant**, une base (u_1, u_2, u_2) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de u_3 étant nulles. Quelle est la matrice de f dans cette base?

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on considère un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(1) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \mathrm{d}x.$$

(2) (a) Rappeler l'expression d'une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2. En déduire que
$$I_0 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
(b) À l'aide du changement de variable $u = x^2/2$, montrer que $I_1 = a^2$.

(3) (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0;+\infty[$
$$\int_0^t x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx = -a^2 t^{n-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) + (n-1)\,a^2 \int_0^t x^{n-2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx.$$
(b) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$ la relation
$$I_n = (n-1)\,a^2 I_{n-2}.$$
(c) Calculer I_2 et I_3.

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par
$$g_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(4) Montrer que g_a est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

(5) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

(6) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(7) Montrer que la variable aléatoire X admet une variance et que $V(X) = \frac{4-\pi}{2}a^2$.

(8) (a) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle, $]0;1]$.
Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.
(b) En déduire un programme `SciLab`, utilisant le générateur aléatoire `rand()`, simulant la variable aléatoire X, le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.

Soit un entier $n \geq 2$. On considère un $n-$ échantillon de X noté $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est à dire que les variables $X_1, X_2, .., X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi que X.

(9) On considère la variable aléatoire $M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

(a) Montrer que pour tout $t \in [0,+\infty[$,
$$P(M_n > t) = \exp\left(-\frac{nt^2}{2a^2}\right).$$
(b) En déduire l'expression de la fonction de répartition de M_n.
(c) Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité, admettant g_b comme densité avec
$$b = \frac{a}{\sqrt{n}}.$$
(d) Montrez que la variable aléatoire M_n admet une espérance et une variance que l'on calculera.