ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

(mini) Devoir surveillé n°4 - Sujet A

Solution

Exercice 1

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) (a) On cherche un polynôme annulateur de A de degré 2, c'est à dire qu'on cherche deux coefficients réels α et β tels que

$$A^2 + \alpha A + \beta I = 0.$$

En effet, quitte à diviser l'expression par celui-ci s'il nétait pas égal à 1, on peut choisir un polynôme *unitaire*, c'est à dire avec un coefficient sur le monôme de degré 2 égal à 1.

Commençons par observer que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

On pourrait résoudre le système correspondant à $A^2 = -\alpha A - \beta I$. Mais on peut aussi raisonner comme suit. En ajoutant βI, on ne *joue* que sur les coefficients diagonaux. Ainsi, pour *tuer* les autres coefficients de A^2, c'est avec αA uniquement qu'il faut agir. Regardons alors le coefficient de A^2 de la deuxième ligne, première colonne par exemple, il est égal à -6 soit 3 fois celui de A à la même position. On observe ensuite que $A^2 - 3A = -2I$, ou encore

$$A^2 - 3A + 2I = 0$$

Il suffit de prendre $P(X) = X^2 - 3X + 2$ (dont les racines sont 1 et 2).

(b) D'après la remarque précédente, comme on sait que les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur, les seules valeurs propres possibles de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

(c) Les instructions `SciLab` nous permettent de voir que $\text{rg}(A - 2I) = 1$ et $\text{rg}(A - I) = 2$ ou encore, par le théorème du rang que

$$\dim\left(\text{Ker}(A - I)\right) = 2 \quad \text{et} \quad \dim\left(\text{Ker}(A - 2I)\right) = 1.$$

Ainsi, 1 et 2 sont bien valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés sont respectivements de dimension 2 et 1.

(d) Pour donner une base de chacun des sous-espaces propres $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$, on résout les équations correspondantes. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Pour $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{aligned} X \in E_1 &\iff AX = X \\ &\iff (A - I)X = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + 2y - 2z &=& 0 \\ -x + y - z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on peut écrire

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (-1, 0, 1), \qquad E_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

- Pour $\lambda_2 = 2$,

$$\begin{aligned} X \in E_2 &\iff AX = 2X \\ &\iff (A - 2I)X = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x &=& 0 \\ -2x + y - 2z &=& 0 \\ -x + y - 2z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff X = z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on peut écrire

$$u_3 = (0, 2, 1), \qquad E_2 = \mathrm{Vect}(u_3).$$

(2) (a) Par principe de concaténation, la famille (u_1, u_2, u_2) est une famille de vecteurs propres de f qui est **libre**. Comme elle est composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle en forme une base.
Ce n'était pas demandé, mais on poursuit; dans cette base, la matrice de f est alors donnée par

$$D = \mathrm{Mat}(f, (u_1, u_2, u_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et en notant P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u_1, u_2, u_3), c'est à dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la formule de changement de base permet d'écrire que

$$A = PDP^{-1}.$$

Exercice 2

Cet exercice provient du sujet **EML 2012** (Exercice 3). On renvoie à la solution disponible *via* ce lien. On propose néanmoins une solution pour la question `SciLab`.

(8) (b) On applique la formule qui donne la loi de X à partir de la loi uniforme.

```
a=input("a=?")
X=a*sqrt(-2*log(rand( ))); disp(X)
```