ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

(mini) Devoir surveillé n°4 - Sujet B

Mercredi 19 Janvier
Durée : 2 heures

Exercice 1

On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Expliciter $\text{Im}(f)$ et préciser le rang de f.
(2) Donner sans calcul une valeur propre de B et expliciter, toujours sans calcul, une base du sous-espace propre associé. L'endomorphisme f est-il un automorphisme?
(3) Vérifier que $B\left(B^2 - 2B - 8I\right) = 0$. En déduire deux autres valeurs propres possibles pour B.
(4) Vérifier que les deux valeurs précédentes sont bien des valeurs de B que B est diagonalisable.
(5) Expliciter une matrice P inversible, dont la première ligne ne contient que des 1 et une matrice D diagonale telles que
$$B = PDP^{-1}.$$
(6) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $B^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie pour tout x réel par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1] \end{cases}$$

(1) Représenter l'allure de la courbe de f.

(2) (a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.
(b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X admettant f comme densité.

(2) (a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.
(b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

(3) Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X , est définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}, & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note F_Y sa fonction de répartition.

(4) (a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.
(b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.
(c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0;1] \end{cases}$$

(d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

(5) On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0;1]$.
On pose $I = \min(U, V)$. On **admet** que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ et on note F_I la fonction de répartition de I.

(a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.
(b) En déduire que I suit la même loi que Y.
(c) Compléter la déclaration de fonction `SciLab` suivante pour qu'elle simule la loi de Y .

```
function Y=DS4()
    U=............
    V=............
    if ............. then
        Y=..........
    else
        Y=..........
    end
endfunction
```