ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

(mini) Devoir surveillé n°4 - Sujet B

Solution

Exercice 1

On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) L'image de f est engendrée par les colonnes de B. Celle-ci ayant deux premières colonnes non colinéaires et une troisieme égale à la première, on peut écrire

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et $\mathrm{rg}(f) = 2$.

(2) Par le théorème du rang, on peut déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$. En particulier, 0 est valeur propre de f est le sous-espace propre associé est de dimension 1. Comme la première et la troisième colonne de B sont égales on a $f(e_1) = f(e_3)$ ou encore $f(e_1 - e_3) = 0$ et $e_1 - e_3$ est dans le noyau de f et en forme donc une base car celui-ci est de dimension 1

$$E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

De plus, 0 étant valeur propre, f n'est pas bijectif et ce n'est donc pas un automorphisme.

(3) Le calcul donne bien $B\left(B^2 - 2B - 8I\right) = 0$. On en déduit que le polynôme $P(X) = X(X^2 - 2X - 8)$ annule B. Ainsi les valeurs propres de B sont à chercher parmi les racines de P c'est à dire

$$\mathrm{Sp}(B) \subset \{0; -2, 4\}.$$

(4) On sait déjà que 0 est bien valeur propre; on vérifie donc pour -2 et pour 4.

- Pour $\lambda = -2$. On a

$$BX = -2X \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& 0 \\ 4x+4y+4z &=& 0 \\ y+2z &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& -2z \end{array}\right.$$
$$\iff X = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, -2 est bien valeur propre de f et on a

$$E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- Pour $\lambda = 4$. On a

$$BX = 4X \iff \left\{\begin{array}{rcl} -4x+y &=& 0 \\ 4x-2y+4z &=& 0 \\ y-4z &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& 4z \end{array}\right.$$
$$\iff X = z\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, 4 est bien valeur propre de f et on a

$$E_4 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

On peut maintenant affirmer que

$$\text{Sp}(B) = \{0; -2, 4\}.$$

Ayant 3 valeurs propres distinctes, B est diagonalisable.

(5) Par concaténation, la famille de vecteurs propres de B

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}$. En notant P la matrice (par conséquent inversible) de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{F}$, et D la matrice de f dans cette nouvelle base, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et, par la formule de changement de base,

$$B = PDP^{-1}.$$

(6) C'est une récurrence facile à savoir refaire.

- Initialisation. Pour $n = 1$, la question précédente nous donne bien $B = PDP^{-1}$.

- <u>Hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \geq 1$, on ait $B^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B \times B^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} \\ &= PD \times D^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

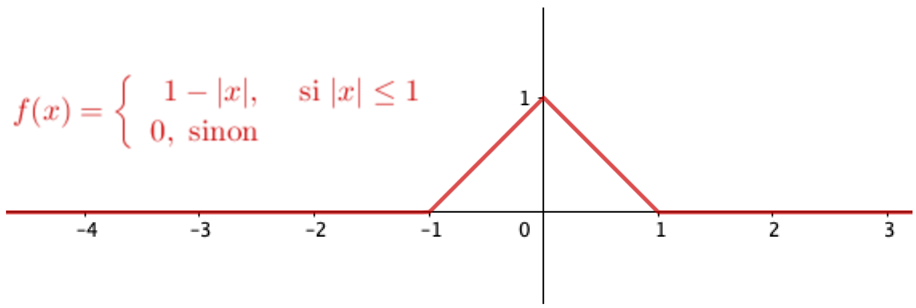
Exercice 2

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 2013**.

(1) On sait que $|x| = x$ si $x \geq 0$ ou $|x| = -x$ si $x < 0$. Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} x < -1 \\ 1+x, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1-x, & \text{si } 0 \leq x <\leq 1 \\ 0, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

ce qu'on représente (c'est affine par morceaux) sans difficulté:



(2) (a) Pour tout $x \in [0;1]$, on a $|x| = x$. D'où

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2}$$

C'est-à-dire

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Pour l'intégrale $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$, on a, en faisant le changement de variable affine $u = -x$:

$$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^0 f(-u)(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 f(-u)\mathrm{d}u.$$

Or, $f(u) = 1 - |-u| = 1 - |u| = f(u)$. D'où

$$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$$

Remarque : En fait, faire le calcul directement (sans se servir de l'intégrale précédente) était tout aussi long.

(b) On vérifie les hypothèses d'une densité de probabilité:

- La fonction f est **continue** sur $]-1;1[$ comme somme de fonctions continues. Elle est également continue sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$ (car elle y est nulle). Donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
- Pour tout $x \in [-1;1]$, on a $|x| \leqslant 1$, et donc $f(x) \geqslant 0$. De plus, pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, on a $f(x) \geqslant 0$ également (car $f(x) = 0$). Donc finalement, on a $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ sont évidemment convergentes et égales à 0 (car f est nulle sur les intervalles correspondants). De plus, par relation de Chasles

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)d\mathrm{x} &= \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \quad \text{(question précédente)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Par relation de Chasles toujours, on en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 1.

On déduit des 3 points ci-dessus que f est une densité de probabilité.

(3) (a) Les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} xf(x)\mathrm{d}x$ et $\int_{1}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ sont évidemment absolument convergentes et égales à 0 (car f est nulle sur les intervalles correspondants). Quant à l'intégrale $\int_{-1}^{-1} xf(x)\mathrm{d}x$, elle est (absolument) convergente également car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé (ce n'est même pas une intégrale impropre).

On en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente et que donc X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} xf(x)\mathrm{d}x \quad \text{car } f \text{ est nulle sur }]-\infty;-1[\text{ et sur }]1;+\infty[\\ &= \int_{-1}^{1} x(1-|x|)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} x(1-|x|)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x(1-|x|)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} x(1+x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x(1-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} (x+x^2)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x-x^2)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} \\ &= \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) De la même manière que pour l'espérance à la question précédente, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Donc X admet un moment d'ordre 2, ce qui implique que X admet une variance. De plus,

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \qquad \text{(formule de König-Huygens)} \\
&= E(X^2) \qquad \text{car } E(X) = 0 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x \quad \text{(théorème du transfert)} \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x \quad \text{car } f \text{ est nulle sur }]-\infty;-1[\text{ et sur }]1;+\infty[\\
&= \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} x^2(1-|x|)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2(1-|x|)dx \\
&= \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x^2+x^3)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x^2-x^3)dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

(4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. On calcule cette intégrale en différenciant les cas

- Si $x < -1$, alors l'intervalle $]-\infty; x]$ est inclus dans $]-\infty; -1[$ sur lequel f est nulle. Donc $F_X(x) = 0$.
- Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors, par relation de Chasles

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\
&= 0 + \int_{-1}^{x} (1-|t|)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{x} (1+t)\mathrm{d}t \quad \text{car } t \leqslant 0 \text{ pour tout } t \in [-1;x] \\
&= \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x} \\
&= \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

- Si $0 < x \leqslant 1$, alors, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{1}{2} + \int_0^x (1-|t|)\mathrm{d}t \quad \text{(voir question 1.(a))} \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^x (1-t)dt \quad \text{car } t \geqslant 0 \text{ pour tout } t \in [0;x] \\ &= \frac{1}{2} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2} + \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

- Enfin, si $x > 1$, alors, on a clairement $F_X(x) = 1$.

En conclusion, on a bien

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2}, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}, & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(5) (a) Si $x < 0$, alors $0 \leqslant P(Y \leqslant x) \leqslant P(Y < 0)$. Or, $P(Y < 0) = 0$ (car $Y = |X|$ et une valeur absolue n'est jamais strictement négative). Donc $P(Y \leqslant x) = 0$, c'est-à-dire $F_Y(x) = 0$.

(b) Soit $x \geqslant 0$. Alors,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) \\ &= P(|X| \leqslant x) \\ &= P(-x \leqslant X \leqslant x) \\ &= P(X \leqslant x) - P(X < -x) \\ &= P(X \leqslant x) - P(X \leqslant -x) \qquad \text{car } X \text{ est une variable aléatoire à densité} \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x).$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On calcule $F_Y(x)$ en différenciant les cas :

- Si $x < 0$, alors $F_Y(x) = 0$ (question 4.(a)).
- Si $x = 0$, alors $F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x)$ d'après la question précédente, *i.e* $F_Y(0) = F_X(0) - F_X(0) = 0$.
- Si $x \in]0;1]$, alors,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= F_X(x) - F_X(-x) \quad \text{(question précédente)} \\ &= \left(\frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + (-x) + \frac{(-x)^2}{2}\right) \quad \text{car } 0 < x \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant -x \leqslant 0 \\ &= 2x - x^2. \end{aligned}$$

- Si $x > 1$, alors

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= F_X(x) - F_X(-x) \quad \text{(question précédente)}\\ &= 1 - 0 \quad \text{car } x > 1 \text{ et } -x < -1\\ &= 1\end{aligned}$$

En résumé

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1\\ 2x - x^2, & \text{si } x \in [0;1]\\ ,1 & \text{si } x > 1\end{cases}$$

On constate alors que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, $F_Y'(x)$ coïncide avec $g(x)$ (où g est la fonction donnée dans l'énoncé). Donc Y admet pour densité la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{si } x \in [0;1]\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$$

(d) De même qu'aux questions 2.(a) et 2.(b), étant donné que g est nulle en dehors de $[0;1]$, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2g(x)\mathrm{d}x$ sont absolument convergentes. Donc Y admet une espérance et une variance. De plus

$$\begin{aligned}E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x \qquad \text{car } g \text{ est nulle en dehors de } [0;1]\\ &= \int_0^1 2x(1-x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 (2x - 2x^2)\mathrm{d}x\\ &= \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1\\ &= 1 - \frac{2}{3}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(théorème du transfert)}\\ &= \int_0^1 x^2g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{car } g \text{ est nulle en dehors de } [0;1]\\ &= \int_0^1 2x^2(1-x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 (2x^2 - 2x^3)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{18}.\end{aligned}$$

(6) (a) On procède comme on a l'habitude de faire (et tout cela a été très bien expliqué en classe)

$$\begin{aligned} F_I(x) &= P(I \leqslant x) \\ &= 1 - P(I > x) \\ &= 1 - P\Big([U > x] \cap [V > x]\Big) \\ &= 1 - P(U > x)P(V > x) \quad \text{par indépendance de } U \text{ et } V \\ &= 1 - (1 - F_U(x))(1 - F_V(x)) \\ &= 1 - (1 - F_U(x))^2 \quad \text{car } U \text{ et } V \text{ suivent la même loi} \end{aligned}$$

Or, d'après le cours connu sur le bout des doigts,

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \in [0;1] \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient

$$F_I(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2, & \text{si } x \in [0;1] \\ 1; & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(b) On constate que $F_I(x) = F_Y(x)$ pour tout x réel. Autrement dit, les variables aléatoires I et Y suivent la même loi.

(c) Sans difficulté

```
function Y=DS4()
     U=rand()
     V=rand()
     if U<=V then
         Y=U
     else
         Y=V
     end
endfunction
```