



Quinzaine de colle n°1

Période du 13/09 au 25/09

Semaine du 13/09 au 18/09

Programme

- Révisions
- Exercices **non traités** de la feuille de révisions de rentrée ou du cahier de vacances
- On pourra en fin de séance commencer à discuter sur les notions du Chapitre 1

Questions de cours

Chaque étudiant.e devra traiter une de ces questions - choisie au hasard - au tableau. Il est donc nécessaire de les avoir préparées au préalable.

- (1) Soit A une matrice carrée vérifiant l'équation $A^2 - 5A + 6I = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer l'inverse de A en fonction de A .
- (2) Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)(-1)^{n+1}}{3^{n+2}}$.
- (3) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
- (4) Montrer rigoureusement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.
- (5) Une urne contient une boule bleue et 2 boules rouges. On tire une boule de l'urne et définit la v.a X qui vaut 1 si la boule tirée est rouge et 0 si elle est bleue. Écrire en SciLab une fonction d'en-tête `fonction y=tirage()` qui simule la variable X .

Suggestion d'exercices

- (1) (*) Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

On présentera l'ensemble des solutions sous forme d'un Vect().

- (2) (*) Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) (*/**) On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

- (a) On considère la suite (p_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $p_n = u_n + v_n$. Montrer que (p_n) est géométrique. En déduire l'expression de p_n en fonction de n .
 (b) À l'aide de la question précédente, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n.$$

- (c) Montrer que la suite (z_n) , définie pour tout n par $z_n = v_n/3^n$, est arithmétique. En déduire l'expression z_n en fonction de n puis celles de v_n et enfin de u_n en fonction de n .

(4) (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

- (a) (**) À l'aide du changement de variable $u = 1 + x^2$, calculer I_1 .
 (b) (*) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$.
 (c) (*) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

puis conclure quant à la convergence de la suite (I_n) .

(5) (**) On effectue des tirages **sans remise** d'une boule dans une urne contenant $N - 1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire. Montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; N \rrbracket)$.

(6) (*) Montrer que la fonction f définie ci-après est une densité de probabilité, avec

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Préciser la fonction de répartition F_X d'une variable X ayant f pour densité. (On commencera par un dessin de la courbe de f .)

(7) (**) On considère une urne contenant 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, ..., n boules numérotées n . On tire au hasard une boule dans l'urne et on note X le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

(8) (***) Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On effectue n tirages avec remise de la boule dans l'urne. et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{\text{ième}} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

- (a) Déterminer la loi de X . Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
 (b) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
 (c) Vérifier que : $\sum_{k=0}^n P(Y = k) = 1$.
 (d) Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

- (e) En déduire $E(Y)$.

(9) (*) Comparer

$$(i) \sqrt{1+x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } +\infty; \quad (ii) x \text{ et } \sqrt{x} \text{ en } 0; \quad (iii) : \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ en } 0$$

$$(iv) e^{1/x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } 0^+; \quad (v) \ln(-x) \text{ et } e^{-x^2} \text{ en } -\infty;$$

$$(vi) e^x - 1 \text{ et } \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} - 1) \text{ en } 0; \quad (vii) e^{2x} - e^x \text{ et } x(x+1) \text{ en } -1.$$

$$(viii) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ et } ex \text{ en } +\infty.$$

(10) (*) Complétez les équivalents suivants :

$$(i) 1 - e^{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots \quad (ii) \ln(1 + e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \dots \quad (iii) 1 - (1 - e^{-x})^n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \dots$$

$$(iv) \frac{x \ln(x)}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \dots \quad (v) \frac{1}{x^2 - 1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \dots \quad (vi) \frac{1}{x^2 - 1} \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \dots$$

(11) (**/***) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = \frac{1}{e^x + 1} + nx$.

- Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- Déterminer un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$, puis un équivalent en $-\infty$. En déduire les limites de $f_n(x)$ aux extrémités de son ensemble de définition ainsi que l'existence de deux asymptotes à la courbe représentative de f_n , dont on précisera les équations.
- Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion A_n et préciser l'équation de la tangente en ce point.
- Quel est le développement limité à l'ordre 2 de $f_n(x)$ au point d'inflexion?

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^3 au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

- Expliciter les développements limités en 0 à l'ordre 3 de e^x et de $\frac{1}{1+x}$.
- En constatant que

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{2}\right)},$$

et en utilisant les deux développements limités précédents, obtenir le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f_n(x)$.

Semaine du 20/09 au 25/09

Programme

- Reprise du DS n°1
- Chapitre 1 en intégralité.
- Révisions probas lois usuelles.

Questions de cours

- (1) Énoncé de la formule de Taylor-Young pour une fonction \mathcal{C}^2 au voisinage de 0 à l'ordre 2. Développements limités usuels en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1 \pm x)$, e^x , $\sqrt{1 \pm x}$ et de $1/(1 \pm x)$. Que donne Taylor-Young pour une fonction de classe \mathcal{C}^2 au voisinage d'un point a ?

- (2) (*) Montrer que

$$\sqrt{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2}.$$

- (3) Montrer rigoureusement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

- (4) Une urne contient 4 boules blanches et une boule noire. On tire sans remise jusqu'à obtention de la boule noire et on note X le nombre de tirages nécessaires. Écrire une fonction SciLab qui simule X . Générer un échantillon de taille 1000 de X puis représenter le diagramme à bâtons des fréquences des valeurs obtenues. Que peut-on conjecturer ?

- (5) Loi de Bernoulli, Loi Binomiale, Loi Géométrique.

Donner l'ensemble des valeurs prises par des v.a. suivant ces lois, les formules pour les loi, l'espérance et la variance et à quels contextes aléatoires elles correspondent.

Suggestion d'exercices

- (1) Exercices semaine précédente en accord avec le programme.

- (2) (*) Déterminer un DL à l'ordre 2 au point indiqué

$$\begin{aligned} (i) e^{x^2+x} \text{ en } 0; & \quad (ii) \ln(1 + e^x) \text{ en } 0; & \quad (iii) (x+1)\sqrt{x+1} - 1 \text{ en } 0; \\ (iv) (\ln(1+x))^2 \text{ en } 0; & \quad (v) x^2 - 2x - 1 \text{ en } 1. \end{aligned}$$

- (3) (*/**) Déterminer un DL d'ordre 2 et en déduire la position relative de la courbe et de la tangente au point considéré

$$(i) x \mapsto \frac{e^x + 2}{\sqrt{1+x}} \text{ en } 0; \quad (ii) x \mapsto (x+1)^{1/3} - (1-x)^{1/3} \text{ en } 0; \quad (iii) x \mapsto x^2 + x + 1 \text{ en } 1.$$

- (4) (*/**) Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt.$$

- (5) (*/**) Montrer que la fonction f ci-dessous est continue sur \mathbb{R}_+ . Est-elle dérivable en 0?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{x^2}}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (6) (**/***) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Le but est de calculer la probabilité $a = P(A)$ où A est l'évènement " X est pair".

- (a) On introduit $Y = (-1)^X$. Quelle est la loi de Y ? Expliciter son espérance en fonction de a .
 (b) Calculer, à l'aide du théorème de transfert, l'espérance de Y en fonction de n et de p . Conclure.