ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Dernières quinzaines de colles

Période du 21/03 au 08/04

Exemples d'exercices

☞ **Algèbre Linéaire**

Exercice 1. On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}(T)$ des matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec T, c'est à dire telles que $CT = TC$.

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice dans la base canonique.

(2) Justifier qu'il existe un vecteur $x \neq 0$ tel quel $f(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de f dans cette base.
(3) En déduire qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$.
(4) On note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Montrer que

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(T).$$

(5) Déterminer $\mathcal{C}(A)$. On montrera que c'est un espace vectoriel et on en déterminera une base et la dimension.

Exercice 2. À tout triplet de nombres réels (a, b, c), on associe la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Une telle matrice $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable ? inversible ?
(2) Calculer $(M - I_3)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
(3) Déterminer M^n en fonction de I_3, M et M^2, pour $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 3. (***) Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E.
(1) Montrer que $\dim \mathrm{Im}(f+g) \leq \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Im}(g)$.
(2) On suppose $f + g$ bijectif et $g \circ f = 0$.
Déterminer $\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 4. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(1) (a) Trouver une relation entre A^2, A et I (matrice d'identité).
(b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
(2) Calculer les valeurs propres possibles de A.
(3) A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $f(e_1 + e_2 + e_3)$, $f(e_2)$ et $f(-e_1 + e_3)$.

Montrer que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

M est-elle diagonalisable ?

Exercice 6. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et φ l'application définie sur E par

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = Q, \quad \text{où} \quad Q(x) = \frac{1}{2}\left(P(x) + P(x+1)\right).$$

(2) Montrer que φ est un endomorphisme de E et donner la matrice M de φ dans la base canonique de E.
(3) Étudier la diagonalisation de M.
(4) En notant I la matrice identité de taille 3, calculer $(M - I)^2$ et $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^n en fonction de n.
(5) La matrice M est-elle inversible?

☞ Analyse

Exercice 7. Étudier la convergence de l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n \mathrm{d}x$ (pour $n \in \mathbb{N}$).
Calculer I_n.

Exercice 8. Étudier la fonction

$$f : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \mathrm{d}t$$

Ensemble de définition, continuité, dérivée, limites, graphe.

Exercice 9. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(x) = x^n + x - 1.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$.
(2) Étudier la monotonie de la suite (x_n)
(3) Montrer que la suite (x_n) converge vers un réel que l'on précisera.
(4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 - x_n \leq \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, à valeurs réelles, par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.
(2) Déterminer les points critiques de f.
(3) Quelle est la nature de ces points critiques ?

☞ Probabilités

Exercice 11. Soit p un réel de $]0;1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Bernoulli telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X_k = 1) = p, \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = q.$$

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

(1) (a) Calculer pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.
(b) Montrer que

$$0 < \operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) < \frac{1}{4}.$$

(2) Calculer, pour tout couple (k,l) tel que $1 \leq k < l \leq n$, $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_l)$.

(3) On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 12. On considère des variables aléatoires $U = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $V = \max(X_1, \ldots, X_n)$ où $(X_1, \ldots, X_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$.

```
function rhoxy=coeff_corr(n,N)

    D=grand(10000,n,"uin",1,N);

    mini=min(D,'c');
    maxi=max(D,'c');

    Cov=corr(mini,maxi,1)
    Xvar=corr(mini,mini,1)
    Yvar=corr(maxi,maxi,1)
    rhoxy=Cov/(sqrt(Xvar*Yvar))

endfunction
```

Voici les résultats renvoyés par la fonction ci-contre pour différentes valeurs de n et N.

	$N=5$	$N=10$	$N=100$
$n=2$	0.4821803	0.4952221	0.4984852
$n=3$	0.2963252	0.3207144	0.3340363
$n=4$	0.2116484	0.2346330	0.2484525
$n=5$	0.1722787	0.1960490	0.2000837

(2) (a) Que fait cette fonction?
(b) Que peut-on conjecturer sur la valeur du coefficient de corrélation pour de grandes valeurs de N?

(3) Dans toute la suite, on se place dans le cas $n = 2$. On admet que $V(U) = V(V) = \dfrac{(N^2-1)(2N^2+1)}{36N^2}$.
(a) Justifier que $U + V = X_1 + X_2$. En déduire que

$$\operatorname{cov}(U,V) = V(X_1) - V(U).$$

(b) Exprimer $\rho(U,V)$ en fonction de N.
(c) Conclure dans le cas $n = 2$ quant à la conjecture précédente.

Exercice 13. On joue à pile ou face jusqu'à obtenir "pile". S'il a fallu n jets de la pièce, on tire ensuite une boule au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Soit X le numéro de la boule obtenue.
Simuler la variable aléatoire X.

Après avoir déterminé l'ensemble des valeurs possibles de X, écrire $P(X = k)$ sous forme d'une série. Déterminer $P(X = 1)$.

Exercice 14. On considère une suite d'épreuves indépendantes, la probabilité du succès étant p ($p \in]0, 1[$) à chaque épreuve.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la v.a.r. égale au nombre d'essais pour obtenir n succès.
Simuler la v.a.r. X_n.
Déterminer la loi de X_n.
Pour $n > 1$, on pose $Y = \dfrac{n-1}{X_n - 1}$. Déterminer $E(Y)$.

Exercice 15. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On extrait les boules de cette urne au hasard, une par une sans remise jusqu'à obtenir les trois boules numérotées 1, 2 et 3.
Soit X le nombre aléatoire de tirages justes nécessaires.
Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 16. On définit la fonction φ par : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = ke^{-|x|}$.

(1) Déterminer le réel k pour φ soit une densité.
(2) Déterminer la fonction de répartition.
(3) Justifier l'existence de $E(X)$ et de $V(X)$ et les calculer.

Exercice 17.

(1) Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$, vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.
(2) Déterminer la loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et de même loi de fonction de répartition F.
Généraliser à n variables.

Exercice 18. Les variables considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit a un réel strictement positif et X une variable de loi uniforme sur $[0, 2a]$.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un $n-$échantillon X_1, ..., X_n de X et on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de M_n et calculer son espérance et sa variance.

(2) En déduire que $U_n = \dfrac{n+1}{2n} M_n$ est un estimateur sans biais de $E(X)$.
Est-il préférable à l'estimateur $V_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$?

☞ **<u>Bonus.</u> Dénombrement**

Séverus Rogue prépare une énigme[1] pour Harry, Hermione et Ron. Il veut disposer différentes bouteilles, en ligne, sur une petite console. Il dispose de 3 bouteilles identiques de Poison, de deux bouteilles (identiques) de vin d'ortie, d'une bouteille d'une potion permettant de passer à travers les flammes et d'une bouteille de polynectar.

(1) Combien y a t-t-il de dispositions possibles des 7 bouteilles?
(2) Si il y a n_1 (resp. n_2, n_3, n_4) bouteilles de Poison (resp. vin, potion, polynectar), combien y a -t-il de dispositions possibles?

[1]voir *Harry Potter à l'école des sorciers*, J.K. Rowling, 1997.