ECE 2 - Année 2021-2022
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°2

Période du 27/09 au 08/10

Semaine du 27/09 au 01/10

Programme

- **Chapitre 1.** Intégralité.
- **Chapitre 2.** Définitions Espace vectoriel, sous-espace vectoriel. Notion de combinaison linéaire, famille libre, famille génératrice.

Question(s) de cours

(1) Énoncé de la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0. Développements limités usuels en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$, e^x et $1/(1+x)$.

(2) Montrer que la fonction f est continue puis dérivable en 0, où

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{x^2}}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(3) Montrer que, dans $\mathbb{R}_2[X]$, le polynôme X^2+1 est combinaison linéaire des polynômes $1, X-1, (X-1)^2$.

(4) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ défini ci-dessous est un espace vectoriel, où

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

et en fournir une base. Quelle est sa dimension?

(5) Loi de Bernoulli, Loi Binomiale, Loi Géométrique.
Donner l'ensemble des valeurs prises par des v.a. suivant ces lois, les formules pour les loi, l'espérance et la variance et à quels contextes aléatoires elles correspondent.

Planche d'exercices

(1) (*) Comparer, dans chaque cas, les suites (u_n) et (v_n):

$$\begin{array}{ll} (i) & u_n = e^{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = e^{n-1} \\ (ii) & u_n = \ln(n)e^n \quad \text{et} \quad v_n = e^n n^{n/2} \\ (iii) & u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{3^n} \quad \text{et} \quad v_n = \dfrac{1}{e^n} + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{\ln(n)} \\ (iv) & u_n = \dfrac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{n}}} \quad \text{et} \quad v_n = \sqrt{n} \\ (v) & u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \dfrac{2}{n^2} \end{array}$$

(2) (*) À l'aide d'un équivalent, donner la limite des suites suivantes

$$(i)\ n^2\left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right); \qquad (ii)\ \ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right); \qquad (iii)\ \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln(n+1)-\ln(n)}.$$

(3) (**) Déterminer un équivalent d'une suite (u_n) vérifiant l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq \frac{u_n}{n+5} \leq 2 + \frac{1}{n^2}$$

(4) (**) Déterminer un équivalent d'une suite (u_n) telle que $(n-1)u_n + e^n$ converge vers 2.

(5) (**) Déterminer un équivalent d'une suite (u_n) vérifiant

$$1 - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) = \frac{n-1}{n}.$$

(6) (*) À l'aide d'un DL judicieusement choisi, montrer que

$$(i)\ \sqrt{1+n^2} \sim n + \frac{1}{2n}; \qquad (ii)\ \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}};$$

$$(iii)\ n^{1/n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2\right);$$

$$(iv)\ \ln\left(1 + n\left(e^{1/n^2} - 1\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(7) (***) Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel $\ell \neq 0$. Montrer que $u_{n+1} \sim u_n$. Est-ce toujours vrai si $\ell = 0$?

(8) (*) Écrire sous forme de Vect$(\cdot)$ les sous-espaces (de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) d'équation $MX = 0$ et $MX = X$, où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(9) (*) Déterminer si les familles suivantes, dans les espaces considérés, sont libres, si elles sont génératrices et si elles forment des bases de l'espace.

$$(i) \qquad \left(X+1, X^2+1, X^3+1\right) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_3[X]$$

$$(ii) \qquad ((3,2,1),(1,2,2),(0,1,1)) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3$$

$$(iii) \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$(iv) \qquad (X, X^2, 2X) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_2[X]$$

$$(v) \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

(10) (***) Soit $\alpha > 0$. Le but de l'exercice est de trouver un équivalent de u_n, où

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha.$$

(a) Quelle est la nature de la suite (u_n)?

(b) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1} \leq (\alpha+1)n^\alpha \leq (n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}.$$

(c) En déduire que

$$n^{\alpha+1} \leq (\alpha+1)u_n \leq (n+1)^{\alpha+1} - 1.$$

(d) Conclure.

(11) (***) Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + 1$. Montrer que la famille $(w_1, w_2, ..., w_n)$ est libre si et seulement si n est impair.

Semaine du 04/10 au 08/10

Programme

- **Chapitre 2.** Intégralité.
- **Chapitre 3.** Ce chapitre étant principalement composé de rappels, on pourra proposer des études de suites récurrentes et/ou implicites dès cette semaine.

Question(s) de cours

(1) Montrer que, dans $\mathbb{R}_2[X]$, le polynôme X^2+1 est combinaison linéaire des polynômes $1, X-1, (X-1)^2$.

(2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ défini ci-dessous est un espace vectoriel, où

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \;:\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

et en fournir une base. Quelle est sa dimension?

(3) Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de k vecteurs d'un espace vectoriel E. Définition et Caractérisation de $\mathcal{F}$ libre. Liens entre k et $\dim(E)$ selon que $\mathcal{F}$ est libre ou génératrice.

(4) (*) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Montrer que (I, A, A^2) est libre.

Planche d'exercices

(1) Exercices semaine précédente relatifs au Chapitre 2.

(2) (*) Montrer **de deux façons** que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels et en exhiber une famille génératrice

$$(i) \qquad F = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ M = \begin{pmatrix} 0 & a & a+b \\ -a & 0 & b \\ b+c & c & 0 \end{pmatrix}, \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$(ii) \qquad G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x-y-t & = & 0 \\ x+y & = & 0 \\ z-2t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$(iii) \qquad H = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \right\}.$$

$$(iv) \qquad J = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] : \ X^2P' - 2P = 0 \right\}$$

(3) (*/**) On considère les trois polynômes $P_0(X) = (X+1)(X-1)$, $P_1(X) = (X-2)(X+1)$ et $P_2(X) = (X-1)(X-2)$.
  (a) Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre.
  (b) En déduire que celle-ci forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Préciser alors les coordonnées de X dans cette base.

(4) (**/***) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ M = P(A), \ P \in \mathbb{R}[X]\}$.
  (a) Montrer que F est un espace vectoriel.
  (b) Montrer que A^2 est combinaison linéaire de I et A.
  (c) Montrer que $\mathrm{vect}(I, A) \subset F$.
  (d) À l'aide de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par $X^2 - 1$, montrer que $F \subset \mathrm{vect}(I, A)$. Conclure à l'égalité des sous-espaces.
  (e) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et donner l'expression d'un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_nI + b_nA$.

(5) (**) Si A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on appelle commutant de A, le sous-ensemble suivant, noté $C(A)$:

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) : \ AM - MA = 0\}$$

  (a) Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel.
  (b) Dans cette question, $p = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $C(A)$ ainsi que sa dimension.

(6) (**) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F_a = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \ P(a) = 0\}$. Démontrer que $\mathcal{B} = \left((X-a)X^k\right)_{0 \le k \le n-1}$ est une base de F_a. Quelle est la dimension de F_a? Donner les coordonnées de $(X-a)^n$ dans cette base.

(7) (*) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = (u_n^2 + 2)/3$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3$ puis que (u_n) est croissante. Quelle est la limite de la suite?

(8) (*) Montrer que l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de la suite (a_n).