ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°3

Période du 11/10 au 22/10

Semaine du 11/10 au 15/10

Programme

- **Chapitre 3.** Intégralité.
- **Chapitre 4.** Notion d'application linéaire (et endomorphisme). Noyau, Image. Matrice dans une base.

Question(s) de cours

(1) Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$. Calculer $P(1)$. En déduire une factorisation et toutes les racines de P.

(2) Définition de la dimension d'un espace vectoriel. Lien entre nombre de vecteurs d'une famille, la dimension et le fait que la famille soit génératrice et/ou libre.

(3) (*) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$. Montrer que (I, M, M^2) est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(4) Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a;b]$ stable par f et vérifiant $0 < f'(t) < q$ (avec $0 < q < 1$) pour tout $t \in [a;b]$ et (u_n) une suite définie par son premier terme u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifiant $u_n \in [a,b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution $\alpha \in [a,b]$.
  (b) Montrer que, pour tout n
  $$|u_{n+1} - \alpha| \leq q|u_n - \alpha|$$
  (c) En déduire la convergence de (u_n) vers α.

(5) Montrer que l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

Planche d'exercices

(1) Exercices 302, 304, 305, 308, 309, 310.

(2) (*) Soient f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geq 0$.
  (a) Montrer que $f([1;3]) \subset [1;3]$.
  (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1;3]$, notée α.

(c) Montrer que, pour tout $x \in [1;3]$, on a
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$
(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}|u_n - \alpha|.$$
(e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$
(f) Conclure quant à la convergence de (u_n).

(g) Écrire un programme `SciLab` qui calcule et affiche une approximation de α à ε près, où ε est entré par l'utilisateur.

(3) (*) On considère, pour $n \geq 3$, l'équation
$$(E_n) \qquad x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$
(a) On introduit la fonction $f_n :\ x \mapsto x^2 + x^2 + 2x - 1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer. Quelles sont les variations de f^{-1}?

(b) Montrer alors que (E_n) possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n. Montrer de plus que, pour tout $n \geq 3$,
$$0 < x_n < \frac{1}{2}.$$
(c) Montrer que (x_n) est croissante.

(d) En conclure que (x_n) converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.

(e) En utilisant un encadrement de x_n, montrer que x_n^n tend vers 0, si n tend vers $+\infty$.

(f) Conclure quant à la valeur de ℓ.

(4) (**) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que
$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t.$$
(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.

(b) Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'inégalité $f(x) \geq e \ln x$.

(c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(d) Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1]$, l'inégalité $f(x) \leq e^x \ln x$.

(e) En déduire $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(f) Dresser le tableau de variation de f.

(g) On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

  (i) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion A et déterminer les coordonnées du point A.

  (ii) Écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.

  (iii) Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$.

(h) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n, vérifiant
$$\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t = n.$$
(i) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

(j) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(5) (**/***D'après ORAL **HEC 2013**, SP) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}.$$

(a) Montrer que l'équation $f_n(x)$ admet une unique solution strictement négative, notée x_n.
(b) Montrer que (x_n) est décroissante et convergente.
(c) Déterminer la limite ℓ de (x_n).
(d) On pose $y_n = x_n - \ell$. Déterminer un équivalent de y_n.

(6) On considère l'application linéaire $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \to & (2x+y+z, x+y+t, x+z-t) \end{array}$.

(a) Écrire la matrice de g dans les bases canoniques.
(b) Déterminer une base du noyau de g.
(c) En déduire une base l'image de g.

(7) On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & Q(X) = P(X+1) - P(X) \end{array}$$

(a) Montrer que f est linéaire.
(b) Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Calculer $f(P)$. f est-elle injective ?
(c) Déterminer une base de l'image de f. f est-elle surjective ?
(d) Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ n'ayant pas d'antécédent par f.
(e) Déterminer une base du noyau de f.
(f) Quelle est la matrice de f dans la base canonique ?

Semaine du 18/10 au 22/10

Programme

- **Chapitre 4.** Intégralité.
- Reprise du **DS n°2**. La problème 1 doit être maîtrisé par tou.te.s !!!!

Question(s) de cours

(1) Montrer que l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

(2) On considère la matrice M définie par :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer trois vecteurs V_1, V_2, V_3 tels que

$$\operatorname{Ker}(M - I) = \operatorname{Vect}(V_1), \qquad \operatorname{Ker}\left(M - \frac{1}{2}I\right) = \operatorname{Vect}(V_2), \qquad \operatorname{Ker}\left(M - \frac{1}{3}I\right) = \operatorname{Vect}(V_3).$$

(b) Montrer que la famille (V_1, V_2, V_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(3) Énoncé du théorème du rang. Suite d'équivalences dans le cas d'un endomorphisme f sur un espace vectoriel de dimension finie E.

Planche d'exercices

(1) Exercices semaine précédentes en Algèbre Linéaire.

(2) Écrire les matrices (dans les bases canoniques correspondantes) des applications suivantes

$$f_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longmapsto \begin{pmatrix} 5x-6z \\ 3x+y+3z \\ x+4z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}, \quad f_2 : \ x = \alpha u_1 + \beta u_2 \in E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \longmapsto \alpha u_2 - \beta u_1 \in E$$

$$f_3 : \ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto M - 2\,{}^tM \in \mathbb{R}; \qquad f_4 : \ P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto (X-1)P' - 3P \in \mathbb{R}_3[X].$$

(3) Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par son action sur la base canonique

$$f(e_1) = 2(e_3 - e_2), \quad f(e_2) = 3e_1 + 5e_2 - 3e_3, \quad f(e_3) = 2(e_1 + e_2).$$

(a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
(b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorphisme est-il injectif? surjectif?
(c) On introduit les sous-espaces

$$E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \ f(u) = u\}, \quad \text{et} \quad E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \ f(u) = 2u\}.$$

(i) Trouver une base $\{u\}$ de E_1 et une base $\{v, w\}$ de E_2.
(ii) Montrer que $\mathcal{C} = \{u, v, w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
(iii) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$.

(4) On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on introduit les vecteurs

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1) = w_1, \quad f(e_2) = w_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = w_3.$$

(a) Exprimer w_1, w_2 et w_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3.
(b) En déduire la matrice de f dans la base canonique.
(c) Expliciter $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.
(d) Donner une base de noyau de f et une base de son image.
(e) L'application est-elle injective? surjective?

(5) Déterminer le noyau, l'image et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(6) Soit $\alpha > 0$. On considère les fonctions f_1 et f_2, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f_1(x) = e^{\alpha x}, \qquad f_2(x) = xe^{\alpha x},$$

on note E l'espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ (E est donc un sous-espace vectoriel est de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$) et Δ l'endomorphisme de E défini par

$$\Delta : g \longmapsto g'.$$

(a) Vérifier que (f_1, f_2) est libre et forme bien une base de E.
(b) Quelle est la matrice, que l'on notera A, de Δ dans cette base ?
(c) L'endomorphisme Δ est-il un automorphisme?
(d) Calculer A^2 puis A^3. Conjecturer une formule pour A^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on démontrera par récurrence.
(e) En déduire les expression de $f_1^{(n)}(x)$ et $f_2^{(n)}(x)$.

Approfondissement 1

Dans tout l'exercice, $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_N[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à N.

(1) Soit a un nombre réel non nul et P un élément de $\mathbb{R}_N[X]$.
Justifier que $P(aX+1-a)$ (c'est-à-dire la fonction : $x \longmapsto P(ax+1-a)$) est un polynôme de même degré que P.

Dans toute la suite de l'exercice, pour tout réel a non nul, on note f_a l'application de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(ax+1-a)$.

(2) Soient a et b des nombres réels non nuls.
  (a) Montrer que : $f_b \circ f_a = f_{ab}$.
  (b) Démontrer que f_a est un isomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$, et préciser sa bijection réciproque, notée $(f_a)^{-1}$.
  (c) On pose : $(f_a)^0 = Id$ et, pour tout entier naturel n : $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a$.
  Démontrer que, pour tout entier naturel n : $(f_a)^n = f_{a^n}$.

(3) Pour tout réel a non nul, on note M_a la matrice de f_a dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^N)$ de $\mathbb{R}_N[X]$.
  (a) Dans cette sous question seulement, on suppose $N = 3$.
  Expliciter alors la matrice M_a ainsi que son inverse.
  (b) Dans le cas général, donner le coefficient de la $(i+1)$-ième ligne et $(j+1)$-ième colonne de M_a (i et j entiers compris au sens large entre 0 et N).
  (c) n désignant un entier naturel, justifier l'égalité : $(M_a)^n = M_{a^n}$.
  Ce résultat reste-t-il valable si n est un entier négatif ?

(4) Préciser l'ensemble des valeurs propres de f_a.
Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N, calculer $f_a\big((X-1)^k\big)$.
L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?

Approfondissement 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On considère un endomorphisme f de E tel que

$$f^2 = -\mathrm{Id}.$$

(1) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \emptyset$

(2) (a) Soit $u \in E$, $u \neq 0$. Montrer, par l'absurde, que la famille $(u, f(u))$ est libre.
  (b) Montrer que le sous-espace $F_u = \mathrm{Vect}(u, f(u))$ est *stable* sous l'action de f, c'est à dire que

$$\forall x \in F_u,\ f(x) \in F_u.$$

(3) Dans cette question uniquement on considère le cas $n = 2$.
  (a) Donner, en exhibant une matrice qui représenterait f dans la base canonique, un exemple d'un tel endomorphisme.
  (b) À l'aide de la question 2a, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f présente des 0 sur la diagonale. Expliciter la matrice trouvée.

(4) On revient au cas général. On suppose[1] que $n = 2k$ est pair.

[1]En fait, il est possible de montrer que c'est nécessaire

(a) On suppose qu'il existe, pour un certain $i \in [\![1; k-1]\!]$, des vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_i)$ tels que la famille

$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), ..., u_i, f(u_i))$$

est libre. Montrer qu'il existe un vecteur u_{i+1} tel que la famille

$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), ..., u_i, f(u_i), u_{i+1}, f(u_{i+1}))$$

est encore libre.

(b) En déduire l'existence d'une base dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}$$