ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°4

Période du 15/11 au 26/11

Semaine du 15/11 au 19/11

Programme

- Reprise du **Concours Blanc**, sujet Math 1.
- **Chapitre 4.** Intégralité.
- Quelques calculs de sommes doubles
- **Chapitre 5.** Séries numériques: séries de référence, séries télescopiques, ...

Question(s) de cours

(1) Énoncé du théorème du rang. Suite d'équivalences dans le cas d'un endomorphisme f sur un espace vectoriel de dimension finie E.

(2) Séries de référence et leurs sommes lorsque celles-ci sont au programme.

(3) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{2}{3}\right)$. Écrire le tableau de la loi de X. Préciser son espérance et sa variance.

Planche d'exercices

(1) Écrire les matrices (dans les bases canoniques correspondantes) des applications suivantes

$$f_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longmapsto \begin{pmatrix} 5x - 6z \\ 3x + y + 3z \\ x + 4z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}, \quad f_2 : x = \alpha u_1 + \beta u_2 \in E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \longmapsto \alpha u_2 - \beta u_1 \in E$$

$$f_3 : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto M - 2\, {}^tM \in \mathbb{R}; \qquad f_4 : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto (X-1)P' - 3P \in \mathbb{R}_3[X].$$

(2) Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par son action sur la base canonique

$$f(e_1) = 2(e_3 - e_2), \quad f(e_2) = 3e_1 + 5e_2 - 3e_3, \quad f(e_3) = 2(e_1 + e_2).$$

(a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
(b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorphisme est-il injectif? surjectif?
(c) On introduit les sous-espaces

$$E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}, \quad \text{et} \quad E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = 2u\}.$$

(i) Trouver une base $\{u\}$ de E_1 et une base $\{v, w\}$ de E_2.
(ii) Montrer que $\mathcal{C} = \{u, v, w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
(iii) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$.

(3) On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on introduit les vecteurs

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1) = w_1, \quad f(e_2) = w_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = w_3.$$

(a) Exprimer w_1, w_2 et w_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3.
(b) En déduire la matrice de f dans la base canonique.
(c) Expliciter $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.
(d) Donner une base de noyau de f et une base de son image.
(e) L'application est-elle injective? surjective?

(4) Déterminer le noyau, l'image et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(5) Soit $\alpha > 0$. On considère les fonctions f_1 et f_2, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f_1(x) = e^{\alpha x}, \qquad f_2(x) = xe^{\alpha x},$$

on note E l'espace vectoriel $E = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$ (E est donc un sous-espace vectoriel est de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$) et Δ l'endomorphisme de E défini par

$$\Delta : g \longmapsto g'.$$

(a) Vérifier que (f_1, f_2) est libre et forme bien une base de E.
(b) Quelle est la matrice, que l'on notera A, de Δ dans cette base ?
(c) L'endomorphisme Δ est-il un automorphisme?
(d) Calculer A^2 puis A^3. Conjecturer une formule pour A^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on démontrera par récurrence.
(e) En déduire les expression de $f_1^{(n)}(x)$ et $f_2^{(n)}(x)$.

(6) (**) Calculer les sommes doubles suivantes

$$(i) \ \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i} (i-1)(n+1-j), \qquad (ii) \ \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2^{i+j}.$$

(7) (*) Pour chacune des séries suivantes, préciser la nature et calculer la somme en cas de série convergente:

$$(i) \ \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{3 \times 4^n}, \qquad (ii) \ \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad (iii) \ \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$(iv) \ \sum_{n \geq 0} \frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}}, \qquad (v) \ \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 2}{n!}, \qquad (vi) \ \sum_{n \geq 1} n \ln\left(\frac{1 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right).$$

(8) (Un peu de probas - I) Soit X une v.a. finie telle que $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$. Monter que

$$E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j).$$

(9) (Un peu de probas - II) Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an. Pour chaque plante ,la première année, la probabilité de donner une fleur rose vaut $\frac{3}{4}$, la probabilité de donner une fleur blanche vaut $\frac{1}{4}$. Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$ elle donnera une fleur rose.

- si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera l'année $n+1$ de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

On désigne par n un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n, la probabilité de l'événement R_n "la plante donne une fleur rose la nième année".

(a) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique qui vérifie :

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$

(b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p_1 .

(c) Que vaut p_1 ? En déduire p_n , ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

(d) (i) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?

(ii) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?

Plutôt pour la semaine d'après mais sait-on jamais

(1) (*) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ converge.

(2) (*) Montrer que

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et en déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(3) (*/**) Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} w_n$, où

$$w_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}.$$

(4) (**) **Une erreur classique**.

(a) Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ converge (absolument).

(b) Montrer, à l'aide de suites adjacentes, que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

(c) Montrer que

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

(d) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$.

(e) Expliquer le titre de l'exercice.

(5) (*) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ converge.

(6) (*) Montrer que

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et en déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(7) (**) On veut déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles la série de terme général u_n converge, où

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

(a) Montrer que

$$\int_0^n \sqrt{x}\mathrm{d}x \leq \sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}\mathrm{d}x.$$

(b) En déduire un équivalent du numérateur de u_n, puis de u_n.

(c) Conclure.

(8) (**/***D'après **EDHEC 1997**) Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}},$$

où p désigne un entier naturel fixé.

(a) Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ la série de terme général u_n diverge.

☞ On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2)\, u_{n+2} = (n+2)\, u_{n+1}.$$

(c) En déduire par récurrence sur n que

$$S_n = \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)\, u_{n+1}\right)$$

(d) On pose $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

(e) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.

(f) Utiliser le résultat pprécédent pour montrer que la série de terme général $u_n$converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.

(g) On suppose dans cette question que $\ell \neq 0$. Montrer que

$$u_n \sim \frac{\ell}{n}, \qquad n \to +\infty.$$

En déduire une contradiction.

(h) Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.

Semaine du 22/11 au 26/11

Programme

- Reprise du **Concours Blanc**, sujet Math 1.
- **Chapitre 5.** Intégralité

Questions de cours et planche d'exercices

On piochera dans la sélection (abondante) de la semaine précédente