ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°5

Période du 29/11 au 10/12

Semaine du 29/11 au 03/12

Programme

- **Chapitre 5.** Intégralité
- **Chapitre 6.** Loi conjointe, loi marginale, covariance. Loi conditionnelle.

Question(s) de cours

(1) Soit H_n la $n-$ième somme partielle de la série harmonique. Montrer, à l'aide d'une comparaison série/intégrale que
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

(2) On effectue deux tirages successifs sans remise dans une urne qui contient n boules indiscernables au toucher. On note X et Y les valeurs des boules successivement obtenues. Déterminer la loi de X puis la loi conjointe de (X, Y) et enfin la loi de Y. Les variables sont-elles indépendantes?

(3) Soient X une loi de Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et, sachant $[X = n]$, Y une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

(4) Définition Covariance. Propriétés et formule. Cas de l'indépendance. Lien avec variance de la somme de deux variables aléatoires.

Planche d'exercices

(1) On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.
  (a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$.
  (b) Déterminer la loi du couple (X, Y)
  (c) Calculer $P(X = Y)$
  (d) Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

(2) On place au hasard deux paires de chaussettes de couleurs différentes dans deux tiroirs notés t_1 et t_2. Un tiroir peut donc contenir de 0 à 2 paires.

On note X_1 et X_2 respectivement les variables aléatoires égales au nombre de paires de chaussettes contenues dans les tiroirs t_1 et t_2 ainsi que N le nombre de tiroirs occupés.

On note alors T_i le numéro du tiroir choisi pour la paire de chaussettes numéro i. Les paires de chaussettes étant rangées dans les tiroirs indépendamment les unes des autres, on suppose donc que les variables T_1 et T_2 sont indépendantes.

(a) Préciser les lois de T_1 et T_2.
(b) À l'aide des variables T_i, déterminer la loi conjointe du couple (N, X_1) que l'on présentera en recopiant et complétant le tableau suivant.

$N\backslash X_1$	0	1	2
1			
2			

(c) En déduire les lois marginales de N et X_1. Que dire de l'indépendance de N et X_1?
(d) Calculer $E(N)$, $E(X_1)$ puis $\mathrm{cov}(N, X_1)$.
(e) Que peut-on dire du couple (N, X_2) ?

(3) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilité et telles que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = i) = P(Y = i) = \frac{1}{2^i}.$$

(a) Reconnaître les lois de X et Y.
(b) Déterminer la loi de $Z = X + Y$ ainsi que la loi de X conditionnellement à $[Z = k], k \geq 2$.
(c) Calculer $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.
(d) Calculer $P(X \geq 2Y)$ et $P_{[X>Y]}(X \geq 2Y)$.

(4) Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On note X le plus petit numéro des 2 et Y le plus grand.
(a) Compléter le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple (X, Y).

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	0	1/6		
2				
3				
4				

(b) En déduire les loi marginales de X et Y, puis $E(X)$ et $E(Y)$.
(c) Calculer à partir du tableau de la loi conjointe $E(XY)$.
(d) En déduire $\mathrm{cov}(X, Y)$.
(e) On note S la variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$ sans passer par la loi de S.

Semaine du 06/12 au 10/12

Programme

- **Chapitre 6.** Intégralité.
- Reprise du **DS n°3**.
- **Chapitre 7.** Définition d'une intégrale impropre, premiers calculs (*via* obtention d'une primitive)

Question(s) de cours

(1) On effectue deux tirages successifs sans remise dans une urne qui contient n boules indiscernables au toucher. On note X et Y les valeurs des boules successivement obtenues. Déterminer la loi de X puis la loi conjointe de (X, Y) et enfin la loi de Y. Les variables sont-elles indépendantes?

(2) Soient X une loi de Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et, sachant $[X = n]$, Y une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

(3) Définition Covariance. Propriétés et formule. Cas de l'indépendance. Lien avec variance de la somme de deux variables aléatoires.

Planche d'exercices

(1) Mêmes exercices sur les couples que la semaine précédente.

(2) On considère des variables aléatoires $U = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $V = \max(X_1, \dots, X_n)$ où $(X_1, \dots, X_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1; N]\!]$,
$$P(V \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n, \quad \text{puis que} \quad P(V = k) = \left(\frac{1}{N}\right)^n (k^n - (k-1)^n).$$

(b) **Dans toute la suite**, on se place dans le cas $n = 2$.

(i) Déterminer $E(V)$. On **admet** ensuite que que $V(U) = V(V) = \dfrac{(N^2-1)(2N^2+1)}{36N^2}$.

(ii) Justifier que $U + V = X_1 + X_2$. En déduire que
$$\operatorname{cov}(U, V) = V(X_1) - V(U).$$

(iii) Exprimer $\rho(U, V)$ en fonction de N.

(3) (*) Soit p un réel de $]0; 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Bernoulli telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X_k = 1) = p, \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = q.$$
Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

(a) (i) Calculer pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.

(ii) Montrer que
$$0 < \operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) < \frac{1}{4}.$$

(b) Calculer, pour tout couple (k, l) tel que $1 \leq k < l \leq n$, $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_l)$.

(c) On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que
$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

(4) Étudier la nature et, si possible, calculer les intégrales ci-dessous
$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x^2/5}}{5}\mathrm{d}x, \qquad (ii) \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}, \qquad (iii) \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t-1}}.$$

(5) Après avoir justifié la convergence et calculé l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2},$$
justifier la convergence et calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2(1+|x|)^2}.$$

(6) (*)

(a) Justifier de la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(b) À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, montrer que $I = 0$.