ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°7

Période du 10/01 au 14/01

Semaine du 10/01 au 21/01

Programme

- **Chapitre 8.** Intégralité
- **Chapitre 9.** On saura chercher les valeurs propres *via* résolution d'un système à paramètre. Une fois que ceci est maîtrisé, on pourra restreindre la recherche des valeurs propres aux racines d'un polynôme annulateur donné par l'énoncé.

Questions (Exercices) de cours

- Lois usuelles : donner l'expression des fonctions de densité et de répartition puis la valeur de l'espérance et de la variance des lois uniformes sur $[a, b]$, exponentielles de paramètre λ et normale de paramètre m et σ^2.

- Dessiner une courbe gaussienne. Expliquer les propriétés de symétrie et retrouver les valeurs de $P(X \geq a)$, $P(|X| \leq a)$ en fonction de $\Phi(a)$, où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

- Soient $X_1, ...X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[0; 1]$. Déterminer la fonction de répartition de $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Justifier que M_n est une variable à densité, exhiber une densité. Montrer que M_n admet une espérance et la calculer.

- Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$ et $V = -\ln(1 - U)$. Montrer que $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

- Caractérisation (condition nécessaire et suffisante) d'une matrice (ou d'un endomorphisme) diagonalisable. Condition suffisante.

Exercices

(1) Vérifier que la fonction f suivante est une densité de probabilité. En notant X une variable aléatoire ayant f pour densité, expliciter la fonction de répartition F_X de X. La variable X admet-elle une espérance ?

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{3}, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{5}{6(x+1)^2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(2) On considère la fonction φ définie, pour $x > 0$, par $\varphi(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x}$.

(a) (i) Étudier la fonction φ. On représentera le tableau de variations incluant les limites au bord de l'ensemble de définition.

(ii) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ admet une unique solution α et que $1/3 < \alpha < 1/2$.

(b) On introduit maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \alpha \\ \dfrac{1}{x^2(x+1)}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

(i) Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

(ii) Montrer que f est une densité de probabilité. On note X une v.a ayant f pour densité. Montrer que X admet une espérance. Qu'en est-il de la variance?

(iii) Montrer que, pour tout $x > \alpha$,

$$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}.$$

(iv) En déduire, en fonction de α, la valeur de $E(X)$.

(3) (*) On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$P(X = n) = a \ln\left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n+1}}\right),$$

où a est un réel. On noter $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\ln\left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n+1}}\right) \sim \frac{2}{n^2}.$$

(c) X admet-elle une espérance ? Une variance ?

(d) On considère une variable aléatoire U suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1[)$ et on pose

$$Y = \left\lfloor \frac{2}{3^{1-U} - 1} \right\rfloor.$$

Montrer que X et Y ont la même loi.

(e) Proposer une fonction `SciLab` nommée X renvoyant une simulation de X.

(4) Soient λ un réel strictement supérieur à 2 et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

(a) Donner l'expression de la fonction de répartition de X et préciser son espérance et sa variance.

(b) Montrer que $E\left(\mathrm{e}^X\right)$ et $E\left(\mathrm{e}^{2X}\right)$ existent et valent respectivement $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$ et $\dfrac{\lambda}{\lambda - 2}$.

On pose $Y = \mathrm{e}^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire et on note F_Y sa fonction de répartition.

(c) (i) Justifier que $Y(\Omega) = [1; +\infty[$.

(ii) Déterminer $F_Y(t)$ pour $t < 1$ puis montrer que $F_Y(t) = 1 - t^{-\lambda}$ pour $t \geq 1$.

(iii) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

(d) (i) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $E\left(Y^k\right)$ existe si et seulement si $k < \lambda$.
Justifier alors que Y admet une espérance et une variance.
(ii) Calculer les valeurs de l'espérance et de la variance de Y.

(5) On considère deux variables X et Y indépendantes telles que

$$P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$$

et $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$.
Quelle est la loi de $Z = XY$?

(6) On note Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que la fonction F ci-dessous est la fonction de répartition d'une variable à densité

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln(x)), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(7) Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées. En déduire que A est diagonalisable et exprimer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

(8) Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes, ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés. Les matrices sont-elles diagonalisables? Sont-elles inversibles?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(9) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
(a) Montrer que 4 est valeur propre de B et donner une base de l'espace propre E_4.
(b) Déterminer sans calculs une autre valeur propre de B et donner une base de l'espace propre associé.

(10) On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $(M - 3I)^3(M + I)$. En déduire les valeurs propres de M.
(b) M est-elle diagonalisable? Si oui, expliciter une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.

(11) (*) Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} V(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(Y,X) & V(Y) \end{pmatrix}.$$
(a) Justifier que A est diagonalisable.
(b) Montrer que les valeurs propres de A sont positives ou nulles.

(12) (*) Soient $m > 0$ et
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$
(a) Exprimer M^2 en fonction de M et I_3.
(b) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

Semaine du 10/01 au 21/01

Programme

- **Chapitre 9.** Intégralité
- Chaines de Markov : diagramme de transition, matrice de transition, `grand('markov')`n état stable.... On renvoie au TP n°5.

- **Chapitre 10.** On s'intéressera particulièrement dans ce premier programme consacré à ce chapitre à savoir scrupuleusement montrer la régularité d'une fonction de deux variables et au calcul des dérivées partielles. Ensuite, on formera la matrice hessienne au(x) point(s) critique(s). On evitera cette semaine les exercices trop techniques où la recherche (du signe) des valeurs propres de la matrice est astucieuse tout comme le passage du local au global.

- Reprise du (mini) DS 4 du 19/01.

Questions (Exercices) de cours

- Caractérisation (condition nécessaire et suffisante) d'une matrice (ou d'un endomorphisme) diagonalisable. Condition suffisante.

- Montrer que si A est une matrice diagonalisable, alors A^2 l'est aussi.

- Pour quelles valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les matrices ci-dessous sont-elles diagonalisables?
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & m \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2+m \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1+m \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2+m \end{pmatrix}$$
- Définitions de Gradient, points critiques d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercices

(1) Exercices semaine précédente sur la réduction.

(2) On considère la matrice
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(a) Calculer U^2 et l'exprimer en fonction de U et I_4.
(b) En déduire le spectre de U et une base de chaque sous-espace propre.

(3) Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle dont les sommets sont numérotés 1, 2 et 3, de la façon suivante: si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$,

- soit il y reste, avec une probabilité de $\frac{2}{3}$
- soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le mobile au moment n. On suppose qu'à l'instant $n = 0$, il se trouve au sommet numéro 1 (ou encore $X_0 = 1$).

(a) Représenter le diagramme de transition de la chaîne de Markov (X_n).
(b) En déduire la matrice de transition A.
(c) Quelles instructions permettent de simuler et d'afficher la *trajectoire* des n premiers termes de la chaîne, où n est rentré par l'utilisateur?
(d) On pose $B = 6A$. Diagonaliser B. En déduire l'expression de B^n puis de A^n.
(e) Quel est l'état stable de la chaîne?
(f) Déterminer la loi de X_n. La chaîne est-elle convergente?

(4) Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$

$$(i)\ (x,y) \mapsto x^4y^2 + 3x^2y - 2x + 1, \qquad (ii)\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+1},$$
$$(iii)\ (x,y) \mapsto \ln(x)e^y, \qquad (iv)\ (x,y) \mapsto \frac{x+y}{e^y+1}$$

(5) Déterminer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes

$$(i)\ f_1 :\ (x,y) \mapsto x^3 + 2xy + 3xy^2 + y^4 - 1, \qquad (ii)\ f_2 :\ (x,y) \mapsto (x^2+y^2)e^{x^2+y^2},$$
$$(iii)\ f_3 :\ (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x^2+y^2+1}, \qquad (iv)\ f_4 :\ (x,y) \mapsto x^2e^y - 1.$$

(6) Déterminer le domaine de définition et le représenter graphiquement pour chaque fonction suivante

$$(i)\ f_1 :\ (x,y) \mapsto \frac{xe^y}{y} + \ln(x), \qquad (ii)\ f_2\ :\ (x,y) \mapsto \sqrt{2-x-y} + \sqrt{xy}$$

(7) Soit f la fonction qui à tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ associe le réel $e^{-x^2-y^2}$. Déterminer les points critiques de la fonction f. Cette fonction présente-t-elle des *extrema*?

(8) On considère, pour tout la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24.$$

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis déterminer le seul point critique (a,b) de f.
(c) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a,b)$ de f en son point critique.
(d) Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a,b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a,b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.