ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°8

Période du 24/01 au 04/02

Semaine du 24/01 au 28/01

Programme

- Chaines de Markov.
- **Chapitre 10.** Intégralité.
- Reprise des sujets A et B du mini **DS n°4**

Questions (Exercices) de cours

- Définitions de Gradient, points critiques et matrice hessienne d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Montrer rigoureusement que la fonction
$$f:\ (x,y) \mapsto \frac{\ln(1+(x+y)^2)}{1+xy}$$
est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

- Après avoir justifié qu'elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, déterminer les points critiques de la fonction
$$f:\ (x,y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$$

- (**) Montrer, par identification de polynômes, que si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres (éventuellement identiques) d'une matrice diagonalisable $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & s \end{pmatrix}$, alors
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1\lambda_2 & = & ad - bc \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & a + d \end{array} \right.$$

Selection d'exercices

(1) Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle dont les sommets sont numérotés 1, 2 et 3, de la façon suivante: si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$,

- soit il y reste, avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$
- soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le mobile au moment n. On suppose qu'à l'instant $n = 0$, il se trouve au sommet numéro 1 (ou encore $X_0 = 1$).

(a) Représenter le diagramme de transition de la chaîne de Markov (X_n).
(b) En déduire la matrice de transition A.
(c) Quelles instructions permettent de simuler et d'afficher la *trajectoire* des n premiers termes de la chaîne, où n est rentré par l'utilisateur?
(d) On pose $B = 6A$. Diagonaliser B. En déduire l'expression de B^n puis de A^n. (*On pourra commencer par calculer* $B^2 - 9B + 18I$.)
(e) Quel est l'état stable de la chaîne?
(f) Déterminer la loi de X_n. La chaîne est-elle convergente?

(2) Montrer que les fonctions suivantes sont $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et former leur matrice hessienne en un point quelconque (x, y).

$$(i)\ (x,y) \mapsto x^4y^2 + 3x^2y - 2x + 1, \qquad (ii)\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+1},$$

$$(iii)\ (x,y) \mapsto \ln(x)e^y, \qquad (iv)\ (x,y) \mapsto \frac{x+y}{e^y+1}$$

$$(v)\ (x,y) \mapsto x^3 + 2xy + 3xy^2 + y^4 - 1, \qquad (vi)\ (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$$

(3) Déterminer le **domaine de définition** et le représenter graphiquement pour chaque fonction suivante

$$(i)\ f_1 :\ (x,y) \mapsto \frac{xe^y}{y} + \ln(x), \qquad (ii)\ f_2\ :\ (x,y) \mapsto \sqrt{2-x-y} + \sqrt{xy}$$

(4) (a) On considére la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.

(i) Étudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
(ii) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $]0, 1/e[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

(b) On considére la fonction de deux variables réelles f définie par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x(\ln(x) + x + y^2).$$

(i) Déterminer le seul point critique de f.
(ii) Vérifier que f présente un minimum local, noté m, en ce point.
(iii) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$

(5) (D'après **EDHEC 2021**)
Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(a) Justifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) (i) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
(ii) Déterminer les points critiques de f.
(c) (i) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
(ii) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
(d) Cet extremum est-il global?

(6) (D'après **ECRICOME 2000**) Soit T est l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations
$$x\geq\frac{1}{4},\quad y\geq\frac{1}{4},\quad x+y\leq\frac{3}{4}.$$
On note T' l'*intérieur* de T, à savoir l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations
$$x>\frac{1}{4},\quad y>\frac{1}{4},\quad x+y<\frac{3}{4}.$$
Soit f la fonction définie sur T par
$$f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{x+y}.$$

(a) Représenter, sur un même graphique, les domaines T et T'.

(b) On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
  (i) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur T', puis déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.
  (ii) Montrer que f n'admet pas de point critique sur T'.

(c) (**) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x,y) de T
$$2\leq f(x,y)\leq\frac{16}{3}.$$

Semaine du 31/01 au 04/02

Programme

- **Chapitre 10.** Intégralité.
- **Chapitre 11.** Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grand nombres. Convergence en loi.

Questions (Exercices) de cours

- Après avoir justifié qu'elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, déterminer les points critiques de la fonction
$$f:\ (x,y)\mapsto e^{-x^2-y^2}$$
- (**) Montrer, par identification de polynômes, que si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres (éventuellement identiques) d'une matrice diagonalisable $M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & s\end{pmatrix}$, alors
$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1\lambda_2 & = & ad-bc\\ \lambda_1+\lambda_2 & = & a+d\end{array}\right.$$
- Énoncés des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Définition de la convergence en loi.
- Énoncé de la loi faible des grands nombres et démonstration à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que
$$\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t\geq\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right).$$

Planche d'exercices

(1) Exercices semaine précédente fonctions de deux variables.

(2) Soit (X_n) une suite de v.a. telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)$. Montrer que X_n converge en loi vers Z, où $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(e^{-1})$.

(3) Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a. mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{U}([\![1;6]\!])$. On note $Z_n = \min(X_1, ..., X_n)$ et $Y_n = \max(X_1, ..., X_n))$.
   (a) Déterminer la loi de Y_n. Montrer que (Y_n) converge en loi vers une v.a. Y dont on précisera la loi.
   (b) Question analogue avec Z_n.

(4) Soit X une v.a suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
   (a) Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$P\left(X - \frac{1}{\lambda} > \varepsilon\right) \leq P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right)$$
   (b) En déduire, à l'aide de l'inégalité de BT que
$$P\left(X > \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}.$$

(5) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_n(x) = \begin{cases} a_n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n, & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Déterminer a_n de sorte que f_n soit une densité de probabilité. On note X_n une v.a ayant f_n pour densité.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de X_n.
   (c) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une v.a Z à préciser.

(6) (**) Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère une variable aléatoire (X_n) définie par
$$X_n(\Omega) = [\![2; n+1]\!], \qquad P(X_n = k) = \frac{(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k}, \qquad k \in [\![2; n+1]\!].$$
   (a) (i) Montrer que
$$\frac{(k-1)}{n^k}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} + \frac{1}{n^k}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k}.$$
   (ii) (*) À l'aide du triangle de Pascal, vérifier que la formule précédente définit bien une variable aléatoire.

   (b) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \dfrac{k-1}{k!}$.
   (i) Vérifier que (u_k) est une distribution de probabilité. On note alors Z une v.a telle que $P(Z = k) = u_k$.
   (ii) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers Z.