ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Retour sur le programme (3)

Un dernier problème de synthèse

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$.

On dit que la loi d'une variable aléatoire Y est *accessible* depuis une variable aléatoire X, s'il existe une application $T : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la variable aléatoire $T(X)$ suit la même loi que Y.

L'application T est alors appelée une *fonction de transport* de la variable aléatoire X vers la loi de Y.

On associe à T un *coût de transport* $C(T)$ défini, **sous réserve d'existence**, par

$$C(T) = E\Big(\big(X - T(X)\big)^2\Big).$$

Partie I - Transport depuis une variable uniforme

Dans toute cette partie, X est une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) =]0,1[$ et suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.

(1) Rappeler la fonction de répartition et une densité de X, ainsi que l'espérance et la variance de X.

(2) Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. Pour tout $a \in [0, 1-p]$, on note T_a la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$T_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]a, a+p[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Calculer $P\left(T_a(X) = 1\right)$ puis donner la loi de $T_a(X)$ pour $a \in [0, 1-p]$. En déduire que les fonctions T_a sont des fonctions de transport de X vers une même loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

(b) Rappeler l'énoncé du théorème de transfert de l'espérance pour une variable aléatoire à densité.

(c) En déduire que

$$C(T_a) = \frac{1}{3} + p(1-p) - 2ap.$$

(d) Préciser la valeur de a minimisant $C(T_a)$ et le coût minimal associé en fonction de p.

(3) On considère à présent pour tout couple $(a,b) \in]0,1[^2$ tel que $a < b$, la fonction $T_{a,b}$ définie sur $]0,1[$ par :

$$T_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]a, b[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Préciser la loi suivie par $T_{a,b}(X)$ et le coût de transport associé.

(b) Soit $f\ :\ (a,b) \mapsto a^2 - b^2 - a + b + \frac{1}{3}$.
   (i) Déterminer les points critiques de f sur l'ouvert $]0,1[^2$.
   (ii) f admet-elle des *extrema* sur $]0,1[^2$?

(c) Existe-t-il un couple $(a,b) \in]0,1[^2$ vérifiant $a < b$ et minimisant $C(T_{a,b})$?
On pourra admettre que l'ensemble des couples $(a,b) \in]0,1[^2$ vérifiant $a < b$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(4) Soit μ un réel strictement positif et $T_{\mu,1}$ et $T_{\mu,2}$ les applications définies sur $]0,1[$ par

$$T_{\mu,1}(x) = -\mu \ln x \quad et \quad T_{\mu,2}(x) = -\mu \ln(1-x)$$

(a) Vérifier que $T_{\mu,1}$ et $T_{\mu,2}$ sont des fonctions de transport de X vers une loi que l'on précisera.
(b) Montrer que les intégrales $\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$ et $\int_0^1 x \ln x \mathrm{d}x$ convergent et valent respectivement

$$-1, \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{4}.$$

(c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale $\int_0^1 (\ln x)^2 \mathrm{d}x$ converge et est égale à 2.
(d) Calculer, à l'aide des deux sous-questions précédentes, les coûts de transport $C(T_{\mu,1})$ et $C(T_{\mu,2})$ puis comparer ces coûts de transport.
(e) La suite de variables aléatoires $(T_{\frac{1}{n},1}(X))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ? Si oui, préciser la loi limite.
(f) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $C(T_{\frac{1}{n},1})$.

(5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.
On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
(a) Montrer que si Y est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, $\lfloor Y \rfloor + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
(b) Quelle valeur faut-il prendre pour λ pour que la variable $\lfloor Y \rfloor + 1$ suive une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$?
(c) En déduire que toutes les lois géométriques sont accessibles depuis X.
(d) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function y=Geo(p)` simulant une variable suivant la loi géométrique de paramètre p à partir de la commande `X=rand()`.
On rappelle que la fonction `floor(x)` *renvoie la partie entière d'un réel x.*

(6) Dans cette question, Y désigne une variable aléatoire admettant une densité f_Y continue et strictement positive sur un intervalle ouvert non vide $]a,b[$ où a et b sont réels ou infinis, et nulle en dehors de $]a,b[$.
(a) Justifier que la fonction de répartition F_Y de Y réalise une bijection de $]a,b[$ sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.
(b) On note F_Y^{-1} la bijection réciproque. Montrer que F_Y^{-1} est une fonction de transport de la variable aléatoire X vers la loi de Y.
(c) Déterminer la loi de $F_Y(Y)$. En déduire que la loi de X est accessible depuis Y et préciser la fonction de transport associée.
(d) Montrer à l'aide du changement de variable $u = F_Y^{-1}(t)$ que

$$E\Big(\big(X - F_Y^{-1}(X)\big)^2\Big) = E\Big(\big(Y - F_Y(Y)\big)^2\Big).$$

Que signifie ce résultat ?

(7) *Cas particulier*: on suppose ici que Y suit la loi normale centrée réduite.
On note Φ la fonction de répartition de Y et φ la densité de Y qui est continue sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Phi(y)\right)^2 \varphi(y)\,\mathrm{d}y$ converge et déterminer sa valeur.
(b) En remarquant que Φ est bornée sur $\mathbb{R}$, établir la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} y\,\Phi(y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y$.
(c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_{-\infty}^{+\infty} y\,\Phi(y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.
On explicitera $\varphi(y)$ pour le calcul de cette intégrale.
(d) Montrer à l'aide du changement de variable $x = \Phi(y)$ que :

$$\int_0^1 (x - \Phi^{-1}(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y - \Phi(y)\right)^2 \varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

(e) En déduire que le coût de transport $C(\Phi^{-1})$ de la variable X à la variable Y est égal à

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Que peut-on dire du coût de transport de la variable Y à la variable X ?

Partie II - Transport depuis une variable exponentielle

(1) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Montrer que $Y - \lfloor Y \rfloor$ admet pour fonction de répartition

$$F \; : \; x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}, & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(b) Justifier que $Y - \lfloor Y \rfloor$ est à densité et préciser une densité de $Y - \lfloor Y \rfloor$.
(c) En déduire que le coût du transport de Y à la loi de $\lfloor Y \rfloor$ est :

$$E((Y - \lfloor Y \rfloor)^2) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right).$$

(2) On considère une suite de variables aléatoires (Y_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n suit la loi exponentielle de paramètre n.
(a) Montrer que $(Y_n - \lfloor Y_n \rfloor)$ converge en loi.
(b) Quelle est la limite du coût du transport de Y_n à la loi de $\lfloor Y_n \rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$?

(3) On considère une suite de variables aléatoires (Y_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n suit la loi exponentielle de paramètre $1/n$.
(a) Montrer que $(Y_n - \lfloor Y_n \rfloor)$ converge en loi.
(b) Quelle est la limite du coût du transport de Y_n à la loi de $\lfloor Y_n \rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$?
On admettra ici que

$$e^{-1/n} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Soit désormais a un réel strictement positif et b un réel.

(4) (a) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{\frac{x-b}{a}}}, & \text{si } x \geq b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que la fonction G est la fonction de répartition d'une variable à densité.
On appelle $W(a, b)$ la loi associée.
(b) Montrer que la loi $W(a, b)$ est accessible depuis une variable Y suivant la loi exponentielle de paramètre 1 via la fonction de transport $T_{a,b} \; : \; x \mapsto ax^2 + b$.
(c) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et vaut $k!$

(d) En déduire le coût de transport $C(T_{a,b})$ associé à $T_{a,b}$.

(5) Montrer que la fonction $f \ : \ (a,b) \mapsto 24a^2 + b^2 + 4ab - 12a - 2b + 2$ admet un unique point critique (a_0, b_0) sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, que l'on déterminera.

(6) Soit H la matrice Hessienne de f au point (a_0, b_0).
(a) Montrer que les valeurs propres de H sont racines d'une équation du second degré que l'on précisera.
(b) Montrer que si x_1 et x_2 sont les racines d'un trinôme du second degré de la forme $x^2 - sx + p$, alors $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1 x_2$.
(c) En déduire que la somme et le produit des valeurs propres de H sont strictement positifs. Qu'en déduit-on quant au signe des valeurs propres de H ?
(d) En déduire la nature du point critique (a_0, b_0).

(7) (a) On pose $S = \frac{1}{2}H$. Montrer que

$$f(a,b) - f(a_0,b_0) = \begin{pmatrix} a-a_0 & b-b_0 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} a-a_0 \\ b-b_0 \end{pmatrix}.$$

(b) On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de S. Préciser la valeur de $\lambda_1\lambda_2$ et de $\lambda_1 + \lambda_2$.
On ne cherchera pas à calculer explicitement λ_1 *et* λ_2.
(c) Vérifier que (pour tout $i \in \{1;2\}$,

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } S \text{ associé à } \lambda_i \right) \Longleftrightarrow x = \frac{\lambda_i - 1}{2} y.$$

(d) On note $\delta_i = \sqrt{\left(\frac{\lambda_i - 1}{2}\right)^2 + 1}$ et $U_i = \frac{1}{\delta_i}\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_i - 1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $i \in \{1,2\}$.

Soit P la matrice ayant pour vecteurs colonnes U_1 et U_2 (dans cet ordre).
Montrer que ${}^tPP = I_2$. En déduire la matrice ${}^tPSP$ en fonction de λ_1 et λ_2.

(e) On note $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ le vecteur colonne ${}^tP \begin{pmatrix} a-a_0 \\ b-b_0 \end{pmatrix}$.
Déduire de ce qui précédé que $f(a,b) - f(a_0,b_0) = \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2$ puis que f admet un minimum global sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en un unique point que l'on précisera, ainsi que la valeur du minimum.
(f) En déduire les paramètres (a,b) pour lesquels le coût de transport $C(T_{a,b})$ d'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1 vers la loi $W(a,b)$ est minimal.