Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°1 - Math 2

Jeudi 10 Novembre
Durée : 4 heures

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée : pile lui rapporte 1 euro, face lui coûte 1 euro. Au bout de n coups, son gain total (éventuellement négatif) est noté S_n. On a évidemment $E(S_n) = 0$. Le joueur est intéressé à estimer sa probabilité de gagner en n coups plus de K euros, ou au moins d'obtenir une minoration de $P(S_n \geq K)$. C'est l'objet du problème suivant d'obtenir une telle minoration sous la forme d'une inégalité dite de grandes déviations.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour une variable aléatoire X, on notera $E(Y)$ son espérance et $\mathrm{Var}(X)$ sa variance, lorsqu'elles existent.

Première partie : Propriétés des variables aléatoire simples

Une variable aléatoire réelle X est dite simple si elle prend un nombre fini de valeurs.

1) On considère une variable aléatoire simple X.

(a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $E(X^k)$ existe.

(b) Soient X et Y deux variables aléatoires simples, que l'on suppose indépendantes. Montrer que l'on a $E(XY) = E(X)E(Y)$.

On considère la fonction génératrice des moments de X, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$M_X(t) = E(\mathrm{e}^{tX})\,.$$

2) Soit X une variable aléatoire simple prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$ avec des probabilités respectives $p_i = P(X = x_i) > 0, i = 1, \dots, \ell$.

(a)
i) Montrer que $M_X(t) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i \mathrm{e}^{tx_i}$.

ii) Déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $M_X(t) > 0$.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $M_X^{(k)}$ la dérivée k-ième de M_X.

i) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M_X^{(k)}(t) = E(X^k \mathrm{e}^{tX})$.

ii) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

iii) Exprimer $\mathrm{Var}(X)$ en fonction de $M'_X(0)$ et $M''_X(0)$.

(c) Montrer que la fonction M_X est convexe.

3) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires simples indépendantes. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t).$$

4) Un exemple. On suppose ici que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p où p est un réel donné dans $]0, 1[$.

(a) Calculer $M_X(t)$.

(b) Calculer $M'_X(0)$ et $M''_X(0)$.

(c) A l'aide de la formule trouvée dans la question 2)b)iii), retrouver l'expression de $\mathrm{Var}(X)$.

5) Soit Y une variable aléatoire simple prenant les valeurs y_i, $i = 1, \dots, \ell$ avec les probabilités $P(Y = y_i) = p_i > 0$. On suppose que $E(Y) < 0$ et que $P(Y > 0) > 0$.

(a) Montrer que $M'_Y(0) < 0$.

(b) Montrer que $\lim_{t \to +\infty} M_Y(t) = +\infty$.

(c) Déduire qu'il existe $\tau \in]0, +\infty[$ tel que pour tout $t > 0$ on ait $M_Y(t) \geq M_Y(\tau)$.

6) Soit $a < 0 < b$ deux réels et soit X une variable aléatoire simple d'espérance $E(X) = 0$, telle que $P(a \leq X \leq b) = 1$.

(a) Soit $t > 0$ un réel strictement positif. Montrer que pour tout $u \in [a, b]$, on a

$$\mathrm{e}^{tu} \leq \frac{b-u}{b-a}\mathrm{e}^{ta} + \frac{u-a}{b-a}\mathrm{e}^{tb}.$$

(b) En déduire que pour tout $t > 0$, on a $M_X(t) \leq \frac{b}{b-a}\mathrm{e}^{ta} - \frac{a}{b-a}\mathrm{e}^{tb}$.

On pose $p = \frac{-a}{b-a} \in [0, 1]$ et on définit la fonction ψ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\psi(s) = \ln(1 - p + p\mathrm{e}^s) - ps$.

(c) Montrer que pour tout $t > 0$, on a $M_X(t) \leq \exp\big(\psi(t(b-a))\big)$.

(d)
i) Montrer que $\psi(0) = \psi'(0) = 0$.

ii) Montrer que pour tous réels positifs $u, v > 0$ on a $uv \leq \frac{1}{4}(u+v)^2$.

iii) Montrer que pour tout réel $s \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\psi''(s) \leq \frac{1}{4}$.

iv) Conclure que pour tout réel $s \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\psi(s) \leq \frac{1}{8}s^2$.

(e) Conclure que tout $t > 0$, on a $M_X(t) \leq \exp\big(\frac{1}{8}t^2(b-a)^2\big)$.

Deuxième partie : Quelques inégalités

On rappelle que la fonction logarithme est concave, ce qui se traduit par la propriété suivante : si $p_1, \dots p_\ell$ sont des nombres réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} p_i = 1$ et $x_1, \dots, x_\ell$ sont des réels strictement positifs, on a

$$\ln(p_1 x_1 + \cdots + p_\ell x_\ell) \geq p_1 \ln x_1 + \cdots + p_\ell \ln x_\ell.$$

7) Soit X une variable aléatoire simple à valeurs strictement positives.
Montrer l'*inégalité de Jensen*

$$\ln E(X) \geq E(\ln X).$$

8) Soient p et q deux nombres réels strictement supérieurs à 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(a) Soient a et b deux réels positifs. Montrer que $\dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q \geq ab$.

Soient X et Y deux variables aléatoires simples, à valeurs strictement positives.

(b) Montrer que

$$E(XY) \leq \frac{1}{p}E(X^p) + \frac{1}{q}E(Y^q).$$

(c) Soit $\lambda > 0$. Montrer que

$$E(XY) \leq \frac{1}{p}\lambda^{p-1}E(X^p) + \frac{1}{q}\lambda^{-1}E(Y^q).$$

(d) Soient α et β deux réels strictement positifs. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{p}\lambda^{p-1}\alpha + \frac{1}{q}\lambda^{-1}\beta.$$

i) Dresser le tableau de variations de φ.

ii) Trouver le réel λ_0 où φ atteint son minimum.

iii) Déterminer la valeur minimum de φ.

(e) Montrer l' *inégalité de Hölder*

$$E(XY) \leq E(X^p)^{1/p}E(Y^q)^{1/q}.$$

(f) Expliciter l'inégalité dans le cas $p = q = 2$.

9) Soit X une variable aléatoire simple, telle que $E(X) = 0$. On note σ le réel positif tel que $\sigma^2 = E(X^2) > 0$ et ξ le réel positif tel que $\xi^4 = E(Z^4) > 0$. On considère les deux variables aléatoires positives $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \max(-X, 0)$. On pose $\delta = P(X \geq 0)$ et on cherche à estimer δ.

(a) Montrer que $X = X^+ - X^-$. Observer que ceci implique $E(X^+) = E(X^-)$.

(b) Montrer que $X^2 = (X^+)^2 + (X^-)^2$. Observer que ceci implique $\sigma^2 = E[(X^+)^2] + E[(X^-)^2]$.

(c) Montrer que $E[(X^+)^4] \leq \xi^4$ et $E[(X^-)^4] \leq \xi^4$.

(d) Soit W la variable aléatoire définie par $W(\omega) = 1$ si $X(\omega) \geq 0$ et $W(\omega) = 0$ si $X(\omega) < 0$.

i) Montrer que $X^+ = W\,X$.

ii) Montrer que $E((X^+)^2) \leq \sqrt{\delta}\,\xi^2$.

(e) En appliquant l'inégalité de Hölder avec les coefficients $p = 3/2$ et $q = 3$, montrer que

$$E((X^-)^2) \leq E(X^-)^{2/3}\,E((X^-)^4)^{1/3}.$$

(f) En appliquant l'inégalité de Hölder avec les coefficients $p = 4$ et $q = 4/3$, montrer que

$$E(X^-) = E(X^+) \leq \xi\,\delta^{3/4}.$$

(g) Déduire que $\sigma^2 \leq 2\sqrt{\delta}\,\xi^2$.

(h) Conclure que $P(X \geq 0) \geq \dfrac{\sigma^4}{4\xi^4}$.

Troisième partie : Grandes déviations.

On considère une variable aléatoire simple Y prenant les valeurs y_i, $i = 1, \dots, \ell$ avec les probabilités $P(Y = y_i) = p_i > 0$. Comme dans la question 5), on suppose que $E(Y) < 0$ et $P(Y > 0) > 0$. Comme $P(Y > 0) > 0$, il existe des valeurs strictement positives parmi les y_i. Quitte à réindexer les y_i, on suppose qu'il existe $k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ tel que $y_1, \dots, y_k$ sont strictement positifs et $y_{k+1}, \dots, y_\ell$ sont négatifs.

Au vu de la question 5)c), il existe $\tau > 0$ tel que $M_Y(\tau) = \inf\limits_{t \in \,]0,+\infty[} M_Y(t)$. On pose $\rho = M_Y(\tau)$.

10)
(a) Montrer que $P(Y \geq 0) = P(\mathrm{e}^{\tau Y} \geq 1)$.

(b) Montrer que $P(Y \geq 0) \leq \rho$.

11) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\mathrm{e}^{\tau y_i}}{\rho} P(Y = y_i) = 1$.

Soit Z une variable aléatoire à valeurs $y_1, \dots, y_\ell$ telle que $\forall 1 \leq i \leq \ell$, on a

$$P(Z = y_i) = \frac{\mathrm{e}^{\tau y_i}}{\rho} P(Y = y_i).$$

12)
(a) Montrer que $M_Z(t) = \rho^{-1}\,M_Y(\tau + t)$.

(b) Montrer que $E(Z) = 0$.

(c) Montrer que $E(Z^2) > 0$.

13) On rappelle que les valeurs strictement positives parmi les y_i sont $y_1, \dots, y_k$.

(a) Montrer que

$$P(Y \geq 0) = \rho \sum_{i=1}^{k} \mathrm{e}^{-\tau y_i} P(Z = y_i).$$

On pose $\delta = P(Z \geq 0)$.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \delta^{-1} P(Z = y_i) = 1$

(c) Montrer que

$$\ln\Big(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{e}^{-\tau y_i}\delta^{-1}P(Z=y_i)\Big) \geq -\tau\delta^{-1}\sum_{i=1}^{k} y_i P(Z=y_i).$$

(d) On considère $\sigma > 0$ le réel tel que $\sigma^2 = E(Z^2)$.

i) Montrer que $\sum_{i=1}^{k} y_i P(Z=y_i) \leq E(|Z|)$.

ii) En déduire que $\sum_{i=1}^{k} y_i P(Z=y_i) \leq \sigma$.

(e) Montrer que

$$\ln\Big(\sum_{j=1}^{k} \mathrm{e}^{-\tau y_j} P(Z=y_j)\Big) \geq \ln\delta - \frac{\tau\sigma}{\delta}.$$

(f) Conclure que

$$P(Y \geq 0) \geq \rho \exp\Big(-\Big[\frac{\tau\sigma}{\delta} - \ln\delta\Big]\Big).$$

(g) On considère le réel positif ξ tel que $\xi^4 = E(Z^4) > 0$. Montrer que

$$P(Y \geq 0) \geq \rho \exp\Big(-\Big[\frac{4\tau\xi^4}{\sigma^3} - \ln\frac{\sigma^4}{4\xi^4}\Big]\Big).$$

14) On suppose dans cette question qu'il existe deux réels $c < 0 < d$ tels que $P(c \leq Y \leq d) = 1$. On rappelle que l'on a supposé que $E(Y) < 0$ et que $P(Y > 0) > 0$.

(a) On pose $X = Y - E(Y)$.

i) Montrer que X vérifie les hypothèses de la question 6), avec $a = c - E(Y)$ et $b = d - E(Y)$. On vérifiera en particulier que $a < 0 < b$.

ii) En déduire que pour tout $t > 0$, $M_X(t) \leq \exp(\frac{1}{8}t^2(d-c)^2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $X_i = Y_i - E(Y)$.

(b) Montrer que pour tout $t > 0$, on a $P\big(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq 0\big) = P(\mathrm{e}^{t(X_1+\cdots+X_n)} \geq \mathrm{e}^{-ntE(Y)})$.

(c) Montrer que pour tout $t > 0$, $P\big(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq 0\big) \leq \mathrm{e}^{ntE(Y)} M_{X_1+\cdots+X_n}(t)$.

(d) En déduire que pour tout réel $t > 0$, on a

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq 0\Big) \leq \exp\Big(ntE(Y) + \frac{1}{8}nt^2(d-c)^2\Big).$$

(e) Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq 0\Big) \leq \exp\Big(-\frac{2E(Y)^2}{(d-c)^2}\,n\Big).$$