Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°1 - Math 1 - sujet A

Mercredi 9 Novembre
Durée : 4 heures

Les questions précédées de $(*)$ sont réservées aux khubes.

Exercice 1

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$f_n : x \mapsto 1 + \ln(x+n), \quad \text{et} \quad h_n : x \mapsto x - f_n(x).$$

Partie I - Étude de f_1

(1) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_1}$ de la fonction f_1.

(2) Justifier que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$, exprimer $f_1'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f_1. On ne justifiera pas les limites.

(3) (a) Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1.
(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_1(x) \leq x+1$.

(4) Tracer la courbe représentative de f_1. (On y fera figurer la tangente en 0.)

Partie II - Étude d'une suite implicite

(5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée α_n.

(6) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$h_n(\alpha_{n+1}) = \ln\left(\frac{\alpha_{n+1}+n+1}{\alpha_{n+1}+n}\right)$$

(b) En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone. On précisera son sens de variations.

(7) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n > 1 + \ln(n)$.
(b) En déduire la limite de la suite (α_n).

(8) (a) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} h_n(\ln(n)+2) = 1.$$

☞ On **admet** alors qu'il existe un rang $n_0 \geq 2$ tel que,

$$\forall n \geq n_0, \quad h_n(\ln(n)+2) > 0.$$

(b) Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, $\alpha_n < \ln(n) + 2$.
(c) En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(9) $(*)$ Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ et $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$.

Partie III - Valeur approchée de α_1 par dichotomie

(10) Montrer que $1 < \alpha_1 < 3$. On pourra utiliser la Question (7a).

(11) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie un couple $[c, n]$ où c est une valeur approchée de α_1 à `eps` près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie et n le nombre d'étapes nécessaires à la recherche de la valeur approchée.

```
import numpy as np

def alpha_1(eps) :
    a=1
    b=3
    n=1
    while b-a > eps :
        c=(a+b)/2
        if ............... :
            b=c
        else :
            .............
        n= ...........
    return [c,n]
```

Partie IV : Valeur approchée de α_1 par la méthode du point fixe

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

(12) Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

(13) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|.$$

(14) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

(15) Conclure quant à la limite de la suite (u_n).

(16) Écrire une fonction Python d'en-tête `def alpha_1_bis(eps):` prenant en argument un réel `eps` > 0 qui renvoie un couple (u_n, n) tel que

$$|u_n - \alpha_1| < \texttt{eps}.$$

Exercice 2

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie A

(1) (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 (b) $(*)$ Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.
 (c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.
 (d) $(*)$ L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

(2) Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.

 (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
 (b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M définie ci-dessous

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

 (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$.
 (c) En déduire que M est inversible.
 (d) À l'aide de la Question (1) a, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.
 (e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
 Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice $V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

(4) Montrer que $V\ T = T\ V$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.

(5) (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
 En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = a\ e'_1$.

(b) Montrer que $g(e'_2) - a\ e'_2$ appartient aussi au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = b\ e'_1 + a\ e'_2$.

(c) Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = a\ e'_2 + b\ e'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - a\ e'_3 - b\ e'_2$ appartient au noyau de f.

(d) En déduire qu'il existe un réel c tel que

$$V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(6) Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

Partie I - Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement "on tire une boule noire lors du i-ième tirage".
- B_i l'événement "on tire une boule blanche lors du i-ième tirage".

(1) Préciser, en justifiant, $X(\Omega)$.

(2) (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la variable X.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(N):
    x=1
    while .... :
        ....
        ....
    return x
```

(b) Que contient la variable S à l'issue des instructions ci-dessous?

```python
N=5

S=np.zeros(N)
```

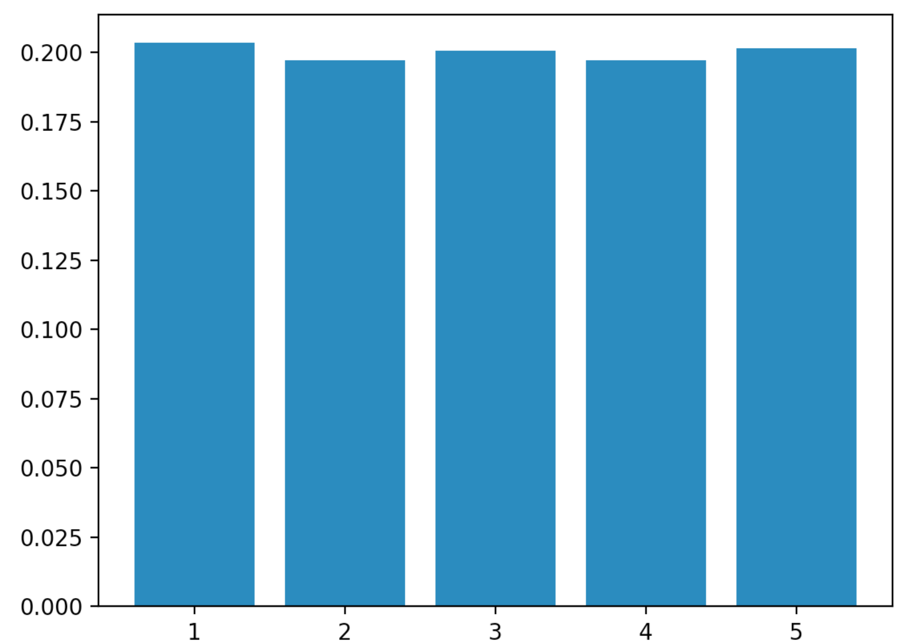
```
for k in range(10000):
    i=simul_X(N)
    S[i-1]+=1
S=S/10000
```

(c) On rappelle que la commande `bar(A, B)` de la bibliothèque `matplotlib.pyplot` permet d'afficher le diagramme à bâtons dont les hauteurs des bâtons positionnés sur les termes de la liste `A` sont les valeurs de la liste `B`. On ajoute alors les commandes dont l'exécution permet l'affichage ci-après. Que peut-on conjecturer pour la variable aléatoire X dans le cas $N = 5$?

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.bar([k for k in range(1, N+1)], S)
plt.show()
```

Affichage Python



(3) On revient au cas général où $N \geqslant 3$.
  (a) Calculer, en justifiant soigneusement, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
  (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
  (c) Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

Partie II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement "on choisit l'urne U_1".
- C_2 l'événement "on choisit l'urne U_2".

(4) Montrer que pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:
$$P_{C_1}(Y = j) = \frac{1}{N}.$$

(5) Calculer $P_{C_2}(Y = j)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$.
(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N - 1$.)

(6) Montrer que :
$$P(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N}, & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N}, & \text{si } j = N \end{cases}$$

(7) Calculer l'espérance de Y.

Partie III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.

(8) Préciser les valeurs prises par T.

(9) Montrer soigneusement que pour tout entier $k \geqslant 2$,
$$P(T = k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$

(10) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.

(11) (a) Calculer $P([U = 1] \cap [T = 2])$.
(b) Calculer $P([U = 1] \cap [T = k])$ pour $k \geq 3$.

(12) Soit j un entier supérieur ou égal à 2.

(a) Calculer $P([U = j] \cap [T = j + 1])$.
(b) Que vaut $P([U = j] \cap [T = k])$ pour $k \geq 2$ et $k \neq j + 1$?

(13) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

(14) Calculer $P(U = 1)$ puis déterminer la loi de U.