



Concours Blanc n°1 - Math 1 - sujet A



Mercredi 9 Novembre
Durée : 4 heures

Les questions précédées de (*) sont réservées aux khubes.

Exercice 1

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$f_n : x \mapsto 1 + \ln(x + n), \quad \text{et} \quad h_n : x \mapsto x - f_n(x).$$

Partie I - Étude de f_1

- (1) Donner le domaine de définition \mathcal{D}_{f_1} de la fonction f_1 .
- (2) Justifier que f_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_f , exprimer $f_1'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f_1 . On ne justifiera pas les limites.
- (3) (a) Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1 .
(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_1(x) \leq x + 1$.
- (4) Tracer la courbe représentative de f_1 . (On y fera figurer la tangente en 0.)

Partie II - Étude d'une suite implicite

- (5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée α_n .
- (6) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$h_n(\alpha_{n+1}) = \ln \left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n} \right)$$

(b) En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone. On précisera son sens de variations.
- (7) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n > 1 + \ln(n)$.
(b) En déduire la limite de la suite (α_n) .

- (8) (a) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(\ln(n) + 2) = 1.$$

☞ On **admet** alors qu'il existe un rang $n_0 \geq 2$ tel que,

$$\forall n \geq n_0, \quad h_n(\ln(n) + 2) > 0.$$

- (b) Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, $\alpha_n < \ln(n) + 2$.
 (c) En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(9) (*) Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ et $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$.

Partie III - Valeur approchée de α_1 par dichotomie

- (10) Montrer que $1 < \alpha_1 < 3$. On pourra utiliser la Question (??).
 (11) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie un couple $[c, n]$ où c est une valeur approchée de α_1 à **eps** près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie et n le nombre d'étapes nécessaires à la recherche de la valeur approchée.

```
import numpy as np

def alpha_1(eps) :
    a=1
    b=3
    n=1
    while b-a > eps :
        c=(a+b)/2
        if ..... :
            b=c
        else :
            .....
        n= .....
    return [c, n]
```

Partie IV : Valeur approchée de α_1 par la méthode du point fixe

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

(12) Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

(13) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|.$$

(14) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

(15) Conclure quant à la limite de la suite (u_n) .

(16) Écrire une fonction Python d'en-tête `def alpha_1_bis(eps):` prenant en argument un réel `eps > 0` qui renvoie un couple (u_n, n) tel que

$$|u_n - \alpha_1| < \text{eps}.$$

Exercice 2

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est la matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie A

- (1) (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 (b) (*) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f .
 (c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f .
 (d) (*) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

- (2) Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.

(a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E .

(b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B}' est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (3) On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B} est la matrice M définie ci-dessous

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base \mathcal{B}' .
- (c) En déduire que M est inversible.
- (d) À l'aide de la Question (1) a, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I , M et M^2 .
- (e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n , en fonction des matrices I , A et A^2 .
 Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$. On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice $V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B}' est V .

- (4) Montrer que $V T = T V$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.
- (5) (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f .
 En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = a e'_1$.

- (b) Montrer que $g(e'_2) - a e'_2$ appartient aussi au noyau de f .
En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = b e'_1 + a e'_2$.
- (c) Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = a e'_2 + b e'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - a e'_3 - b e'_2$ appartient au noyau de f .
- (d) En déduire qu'il existe un réel c tel que

$$V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

- (6) Calculer V^2 en fonction de a , b et c , puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2 , d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.

L'urne U_1 contient $(N - 1)$ boules blanches et une boule noire.

L'urne U_2 contient N boules blanches.

Partie I - Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1 , jusqu'à l'obtention de la boule noire.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.

On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement "on tire une boule noire lors du i -ième tirage".
- B_i l'événement "on tire une boule blanche lors du i -ième tirage".

- (1) Préciser, en justifiant, $X(\Omega)$.
- (2) (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la variable X .

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(N):
    x=1
    while .... :
        ....
        ....
    return x
```

- (b) Que contient la variable S à l'issue des instructions ci-dessous?

```
N=5
S=np.zeros(N)
```

```

for k in range(10000):
    i=simul_X(N)
    S[i-1]+=1
S=S/10000

```

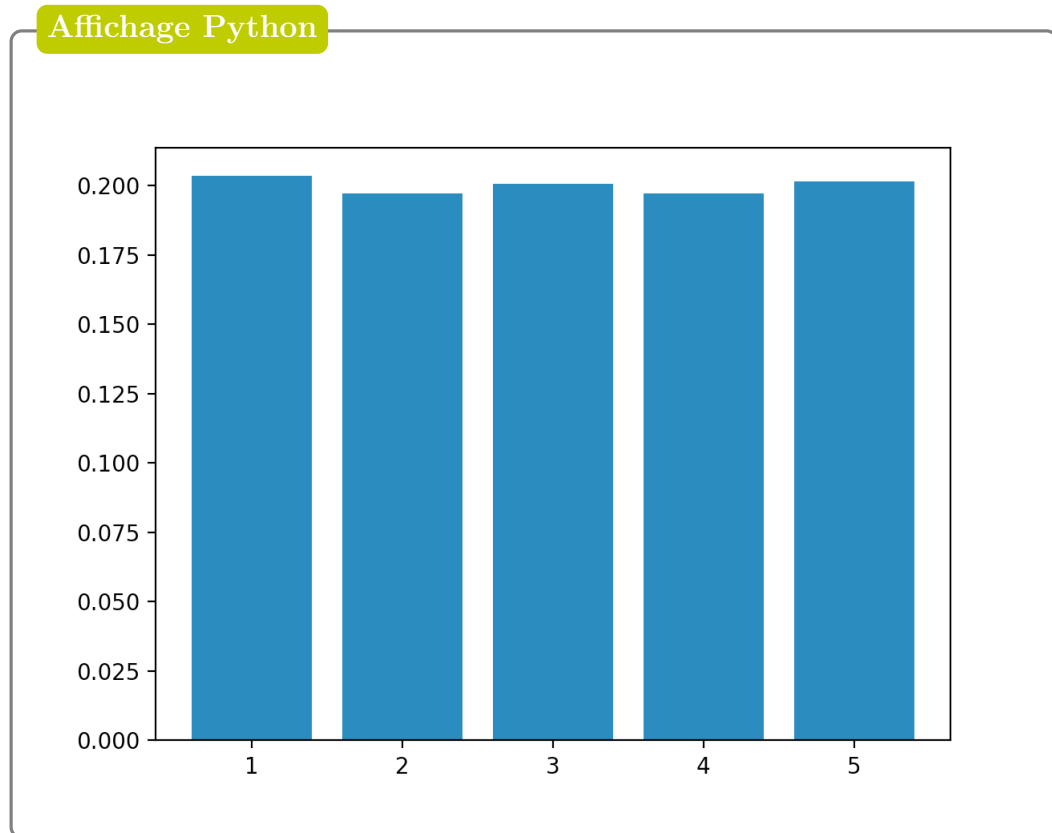
- (c) On rappelle que la commande `bar(A, B)` de la bibliothèque `matplotlib.pyplot` permet d'afficher le diagramme à bâtons dont les hauteurs des bâtons positionnés sur les termes de la liste `A` sont les valeurs de la liste `B`. On ajoute alors les commandes dont l'exécution permet l'affichage ci-après. Que peut-on conjecturer pour la variable aléatoire X dans le cas $N = 5$?

```

import matplotlib.pyplot as plt

plt.bar([k for k in range(1, N+1)], S)
plt.show()

```



- (3) On revient au cas général où $N \geq 3$.
- Calculer, en justifiant soigneusement, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
 - Déterminer la loi de la variable aléatoire X .
 - Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

Partie II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.

On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.

On note :

- C_1 l'événement "on choisit l'urne U_1 ".
- C_2 l'événement "on choisit l'urne U_2 ".

(4) Montrer que pour tout entier $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$P_{C_1}(Y = j) = \frac{1}{N}.$$

(5) Calculer $P_{C_2}(Y = j)$ pour tout entier $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$.
(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leq j \leq N - 1$.)

(6) Montrer que :

$$P(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{2N}, & \text{si } j \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}, & \text{si } j = N \end{cases}$$

(7) Calculer l'espérance de Y .

Partie III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1 . On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.

On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.

(8) Préciser les valeurs prises par T .

(9) Montrer soigneusement que pour tout entier $k \geq 2$,

$$P(T = k) = \frac{1}{N} \left(\frac{N-1}{N} \right)^{k-1} + \frac{N-1}{N} \left(\frac{1}{N} \right)^{k-1}.$$

(10) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.

(11) (a) Calculer $P([U = 1] \cap [T = 2])$.
(b) Calculer $P([U = 1] \cap [T = k])$ pour $k \geq 3$.

(12) Soit j un entier supérieur ou égal à 2.

(a) Calculer $P([U = j] \cap [T = j + 1])$.
(b) Que vaut $P([U = j] \cap [T = k])$ pour $k \geq 2$ et $k \neq j + 1$?

(13) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

(14) Calculer $P(U = 1)$ puis déterminer la loi de U .