Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°1 - Math 1 - sujet A

Mercredi 9 Novembre
Solution

Exercice 1

Cet exercice est inspiré par un exercice du sujet **ECRICOME 2008**. *Il m'a été suggeré par mon collègue Tom Dutilleul (Carnot, Paris 17e) et on renvoie à sa correction (Exercice 2 de son DS1), disponible en cliquant ici.*

Exercice 2

Cet exercice est extait du sujet **ECRICOME 2019**.

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie A

(1) (a) Le calcul donne

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{puis} \qquad A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3},$$

comme demandé.

(b) Comme $A^3 = 0$, il suit que X^3 est polynôme annulateur de A. Les valeurs propres de A sont donc à chercher parmi les racines de X^3 qui n'admet que 0. Comme A n'est pas inversible (plusieurs arguments recevables: $A^3 = 0$ donne par l'absurde une contradiction à l'inversibilité, ou bien on peut observer deux lignes opposées), 0 est bien l'unique valeurs propre de A.

(c) On résout

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x+2y+z & = & 0 \\ x+y+2z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -z \end{array} \right.$$
$$\iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $(-1,-1,1)$ est non nul et qu'il engendre le noyau de A, il en forme également une base.

(d) Le seul sous-espace propre (associé à la valeur propre 0) est le noyau de A, de dimension 1 différente donc de 3. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

(2) Soient $e'_1 = (-1,-1,1), e'_2 = (2,-1,1)$ et $e'_3 = (-1,2,1)$.

(a) La famille $\mathcal{B}'$ étant composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour qu'elle en forme une base.

$$\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -\alpha+2\beta-\gamma & = & 0 \\ -\alpha-\beta+2\gamma & = & 0 \\ -\alpha+2\beta+\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -\alpha+2\beta-\gamma & = & 0 \\ -3\beta+3\gamma & = & 0 \\ 2\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

et la famille est bien libre, ce qui permet de conclure au résultat souhaité.

(b) Le premier vecteur de cette famille est celui trouvé précédemment dans le noyau, son image est donc nulle par f. De plus

$$\begin{array}{rcl} f(e'_2) & = & f(3e_1 + e'_1) = 3f(e_1) + f(e'_1) = 3f(e_1) = (-1,-1,1) \\ & = & e'_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(e'_3) & = & f(e'_1 + 3e_2) = f(e'_1) + 3f(e_2) = 3f(e_2) = (2,-1,1) \\ & = & e'_2 \end{array}$$

ce qui permet d'écrire

$$T = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) On pose

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la matrice $\mathcal{B}$ est la matrice M.

(a) On observe immédiatement (ou on peut trouver *via* résolution du système) que

$$M = -A + I, \quad \text{ou encore} \quad \alpha = -1,\ \beta = 1.$$

(b) Notant Id l'endomorphisme identité, la relation matricielle précédente implique que $h = -f + \mathrm{Id}$ ce qui permet de calculer les images des vecteurs de $\mathcal{B}'$ par h. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} h(e_1') &= -f(e_1') + e_1' \\ &= e_1' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(e_2') &= -f(e_2') + e_2' \\ &= -e_1' + e_2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(e_3') &= -f(e_3') + e_3' \\ &= -e_2' + e_3' \end{aligned}$$

ce qui donne alors

$$M' = \mathrm{Mat}(h, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice M' est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale, elle est donc inversible. Comme M et M' représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables et ont donc notamment le même rang. Ainsi, M est inversible.

(d) On observe que $M - I = -A$. Ainsi, $(M - I)^3 = (-A)^3 = 0$ d'après 1b. Comme M et I commutent, on peut développer

$$0 = (M - I)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I \iff M^3 - 3M^2 + 3M = M \cdot (M^2 - 3M + 3I) = I.$$

On en déduit donc, par unicité de l'inverse de M, que

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I.$$

(e) Comme $M = -A + I$ et que $-A$ commute avec I, la formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned} M^n &= (-A + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-A)^k \qquad (\text{car } (-A)^k \cdot I^{n-k} = (-A)^k) \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-A)^k \qquad (\text{car } A^k = 0,\ k \geq 3) \\ &= \binom{n}{0} (-A)^0 + \binom{n}{1} (-A)^1 + \binom{n}{2} (-A)^2 \\ &= I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2. \end{aligned}$$

Pour $n = -1$, la formule donnerait, notant que $A = I - M$

$$M^{-1} = I + A + A^2 = I + I - M + I - 2M + M^2 = 3I - 3M + M^2,$$

ce qui est bien la relation trouvée en (d). Cette formule est donc également vraie pour $n = -1$.

Partie B

On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que

$$V^2 = T.$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

(1) Par hypothèse, on a
$$VT = V \cdot V^2 = V^3 = V^2 \cdot V = TV,$$
et les deux matrices commutent. Comme V et T représentent respectivement g et f dans la même base $\mathcal{B}'$, il suit que
$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}') = VT = TV = \mathrm{Mat}(f \circ g, \mathcal{B}').$$
Si deux endomorphismes ont la même matrice dans une même base, ils sont égaux. Ainsi, $f \circ g = g \circ f$.

(2) (a) Comme les deux endomorphismes commutent et que $f(e_1') = 0$, on a
$$f(g(e_1')) = g(f(e_1')) = g(0) = 0$$
et $g(e_1')$ est bien un élément du noyau de f. Celui-ci étant engendré par e_1', il existe nécessairement un réel a tel que $g(e_1') = ae_1'$.

(b) De la (presque) même manière
$$f(g(e_2') - ae_2') = f(g(e_2')) - af(e_2') = g(f(e_2')) - af(e_2') = g(e_1') - ae_1' = 0.$$
Ainsi, toujours car e_1' engendre $\mathrm{Ker}(f)$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_2') - ae_2' = be_1'$ ou encore
$$g(e_2') = be_1' + ae_2'.$$

(c) Toujours car g et f commutent (et d'après la question précédente),
$$f \circ g(e_3') = g \circ f(e_3') = g(e_2') = ae_2' + be_1'.$$
Ainsi,
$$f\left(g(e_3') - ae_3' - be_2'\right) = f \circ g(e_3') - af(e_3') - bf(e_2') = ae_2' + be_1' - ae_2' - be_1' = 0,$$
et $g(e_3') - ae_3' - be_2'$ est à nouveau un vecteur du noyau de f.

(d) Toujours comme $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1')$, il existe un réel c tel que
$$g(e_3') - ae_3' - be_2' = ce_1' \iff g(e_3') = ae_3' + be_2' + ce_1'$$
ce qui permet enfin d'écrire la matrice de g (qui est, par définition, V) comme
$$V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(e) Le calcul immédiat donne
$$V^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$
Mais alors, $V^2 = T$ donne en particulier $a = 0$ et $2ab = 1$ ce qui est impossible, rendant absurde l'hypothèse de départ.

Exercice 3

Cet exercice provient du sujet **ECRICOME 2015**.

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

Partie I - Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement "on tire une boule noire lors du i-ième tirage".
- B_i l'événement "on tire une boule blanche lors du i-ième tirage".

(1) La boule noire peut arriver dès le premier tirage. Elle peut, au pire, arriver au dernier tirage (le $N-$ième), une fois que les $N-1$ boules blanches ont été consécutivement retirées de l'urne. On a donc $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

(2) (a) Tant qu'on pioche des blanches (avec proba $(N-1)/N$), on continue à piocher donc le nombre de tirages `x` augmente de 1 et le nombre de boules `n` diminue de 1, ce qui donne le programme suivant :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(N):
    x=1
    while rd.rand( ) > 1/n :
        x=x+1
        N=N-1
    return x
```

(b) Pour $N = 5$, on simule 10000 fois la variable X. Si, $X = i$, on ajoute 1 à la $i-$ème composante de la liste S. En fin de boucle, la composante $i-1$ de S contient donc le nombre de fois, sur les 10000, où X prend la valeur i. Comme ensuite on divise par 10000, il s'agit de la liste des fréquences pour chaque valeur que peut prendre X.

(c) Les hauteurs des bâtons (qui correspondent aux fréquences observées des valeurs de X sur 10000 simulations) sont (quasiment) toutes les mêmes, comme pour une distribution uniforme. On peut conjecturer que, ici pour $N = 5$,

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!]).$$

(3) On revient au cas général où $N \geqslant 3$.

(a) La prise de valeur $X = k$ se traduit par des informations précises sur les k premiers tirages. On utilise la formule des probabilités composées pour passer aux probabilités.

$$P(X=1) = P(N_1) = \frac{1}{N}, \qquad P(X=2) = P(B_1 \cap N_2) = P_{B_1}(N_2)P(B_1) = \frac{1}{N-1} \times \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}$$

$$P(X=3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{N_1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \frac{1}{N-2} = \frac{1}{N}.$$

(b) On généralise le calcul précédent pour bien vérifier qu'on obtient la formule correspondant à la loi uniforme pour $k \in [\![3; N]\!]$. Toujours avec la formule des probabilités composées

$$P(X=k) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} B_j \cap N_k\right) = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{N-j}{N+1-j} \times \frac{1}{N-(k-1)} = \frac{1}{N}$$

et on a bien montré que

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;N]\!]).$$

(c) Le nombre cherché est l'espérance de X. D'après le cours,

$$E(X) = \frac{N+1}{2}.$$

Partie II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement "on choisit l'urne U_1".
- C_2 l'événement "on choisit l'urne U_2".

(4) Sachant qu'on tire dans l'urne U_1, on sera en mesure de déterminer qu'il s'agit bien de cette urne dès l'obtention de la boule noire. Ainsi, reprenant la variable X introduite dans la première partie, on a

$$P_{C_1}(Y=j) = P(X=j) = \frac{1}{N}.$$

(5) L'urne U_2 ne contient que des boules blanches. Tant que celle-ci n'est pas vide, on ne peut pas être certain qu'on ne va pas tirer de boule noire et qu'il ne s'agit pas de l'urne U_1. Ainsi,

$$P_{C_2}(Y=j) = \begin{cases} 0, & \text{si } 1 \leq j \leq N-1 \\ 1, & \text{si } j = N \end{cases}$$

(6) Par la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e $\{C_1, C_2\}$, on a

$$P(Y=N) = P_{C_1}(Y=N)P(C_1) + P_{C_2}(Y=N)P(C_2) = \frac{1}{N} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}.$$

Comme $P_{C_2}(Y=j) = 0$ si $1 \leq j \leq N-1$, la même formule des probabilités totales donne

$$P(Y=j) = P_{C_1}(Y=j)P(C_1) = \frac{1}{2N}.$$

Remarque. On vérifie bien (ce n'est pas nécessaire ni demandé) que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} P(Y=j) &= \sum_{j=1}^{N-1} P(Y=j) + P(Y=N) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{N-1}{2N} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(7) C'est un calcul de somme

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=1}^{N} jP(Y=j) = \sum_{j=1}^{N-1} j \times \frac{1}{2N} + N\left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2N} \times \frac{(N-1)N}{2} + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N-1}{4} + \frac{N+1}{2} \\
&= \frac{3N+1}{4}.
\end{aligned}$$

Partie III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.

(8) $T(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$ car il faut au moins deux tirages pour avoir obtenu au moins une boule blanche et une boule noire et qu'on peut attendre arbitrairement longtemps que cela se produise.

(9) Soit $k \geqslant 2$.

$$P(T=k) = P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k).$$

Or les tirages s'effectuent ici avec remise donc les événements B_i et N_j sont indépendants. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(T=k) &= P(B_1)P(B_2)\ldots P(B_{k-1})P(B_k) + P(N_1)P(N_2)\ldots P(N_{k-1})P(B_k) \\ &= \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N} \end{aligned}.$$

(10) T admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(T=k)$ converge absolument autrement dit si et seulement si la série de terme général $kP(T=k)$ converge car T est à valeurs positives. Or,

$$kP(T=k) = \frac{1}{N}k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

On reconnaît ici des séries dérivées de séries géométriques qui convergent car

$$\left|\frac{1}{N}\right| < 1, \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{N-1}{N}\right| < 1.$$

Ainsi, T admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T=k) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{(1-(\frac{N-1}{N}))^2} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^2} - 1\right) \\ &= N - \frac{1}{N} + \frac{N}{N-1} - \frac{N-1}{N} \\ &= \frac{N^2}{N-1} - 1 \end{aligned}$$

(11) (a) Sans difficulté.

$$\begin{aligned} P(U=1 \cap T=2) &= P\left([B_1 \cap N_2] \cup [N_1 \cap B_2]\right) \\ &= P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) && \text{(par incompatibilité)} \\ &= \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \times \frac{N-1}{N} && \text{(par indépendance)} \\ &= \frac{2(N-1)}{N^2}. \end{aligned}$$

(b) Soit $k \geqslant 3$. Par indépendance des tirages,

$$P(U=1 \cap T=k) = P(N_1 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k) = \frac{1}{N^{k-1}} \times \frac{N-1}{N}.$$

(12) Soit j un entier supérieur ou égal à 2.

(a) On peut écrire

$$P\left([U=j]\cap[T=j+1]\right)=P(B_1\cap\ldots\cap B_j\cap N_{j+1})=\left(\frac{N-1}{N}\right)^j\frac{1}{N}.$$

(b) On observe que $P([U=j]\cap[T=k])=0$ si $k\neq j+1$ car $U=j$ signifie que l'on a obtenu j boules blanches avant d'obtenir au moins une boule de chaque couleur donc nécessairement la $j+1$ ième est noire donc $T=j+1\neq k$.

(13) On a

$$P(U=1)=P(U=1\cap T=2)=\frac{2(N-1)}{N^2}$$

donc

$$P(U=1)P(T=2)\neq P(U=1\cap T=2)$$

et U et T ne sont pas indépendantes.

(14) Commençons par voir que $U(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Par les questions précédentes, et avec la formule des probabilités totales et le système complet d'événements $\{(T=k),k\in[\![2;+\infty[\![\}$ on a :

$$P(U=1)=\sum_{k=2}^{+\infty}P(U=1\cap T=k)=\frac{2(N-1)}{N^2}+\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{N-1}{N^k}$$

Donc

$$P(U=1)=\frac{2(N-1)}{N^2}+\frac{N-1}{N^3}\frac{1}{1-1/N}=\frac{2(N-1)}{N^2}+\frac{1}{N^2}=\frac{2N-1}{N^2}$$

et pour tout entier $j\geqslant 2$

$$P(U=j)=P(U=j\cap T=j+1)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^j\frac{1}{N}.$$