Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°1 - Math 1 - sujet B

Mercredi 9 Novembre
Durée : 4 heures

Les questions précédées de $(*)$ sont réservées aux khubes.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t, & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(1) (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\forall t \in [0, x]$

$$\frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^t+1} \leq \frac{1}{2}.$$

(b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

(c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.

(2) (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire

$$f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x),$$

où g est une fonction que l'on déterminera.

(b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(3) (a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\dfrac{t}{e^t+1} \leq 1$.

(b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(4) (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'équation

$$(E_n) \qquad \frac{2n}{x^2}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t = 1$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on notera u_n.

(b) Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est sa limite lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+3} = 4\,u_{k+2} - 5u_{k+1} + 2u_k.$$

(1) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite_rec_3(n, x,y,z) :` prenant en argument un triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et un entier n et renvoyant le terme de rang n de la suite (u_k) de $\mathcal{E}$ vérifiant $u_0 = x,\ u_1 = y$ et $u_2 = z$.

(2) (a) Montrer que la suite identiquement nulle est élément de $\mathcal{E}$. Montrer ensuite que $\mathcal{E}$ est stable par combinaison linéaire. Ainsi, $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

(b) On définit l'application $\varphi :\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par $\varphi((u_k)) = (u_0, u_1, u_2)$.

(i) Montrer que φ est linéaire. *Attention, ce n'est pas un endomorphisme.*

(ii) Justifier que φ est surjective et montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

(iii) En déduire que φ est un isomorphisme et déterminer alors la dimension de $\mathcal{E}$.

(c) Vérifier que la suite $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}$.

(d) Développer $(q-1)^2(q-2)$. En déduire toutes les suites géométriques appartenant à $\mathcal{E}$.

(e) À l'aide des deux questions précédentes, déterminer une base de $\mathcal{E}$. En déduire *la forme* de l'expression du terme général d'une suite appartenant à $\mathcal{E}$.

(3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$.

(b) Montrer que A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) En déduire que le polynôme $P(X) = (X-1)^2(X-2)$ est annulateur de A.

(d) $(*)$ La matrice A est-elle semblable à une matrice diagonale?

(4) On introduit le sous-espace $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(I, A, A^2).$$

(a) Vérifier que (I, A, A^2) forme une base de $\mathcal{A}$.

(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathcal{A}$. On note alors (a_k, b_k, c_k) les coordonnées de A^k dans la base (I, A, A^2). Préciser les triplets (a_k, b_k, c_k) pour $k \in [\![0, 2]\!]$.

(c) Montrer que la suite $(c_k) \in \mathcal{E}$. On admet que de même les suites (a_k) et (b_k) sont dans $\mathcal{E}$.

(d) Déterminer l'expression des termes général des trois suites précédentes et expliciter A^k en fonction de A^2, A, I_3.

(e) Que dire de la formule précédente pour $k = -1$?

Exercice 3

Une urne contient initialement $n-1$ boules blanches et une boule noire. On vide entièrement cette urne en effectuant des tirages successifs comme suit :

- lors des tirages de rang impair (le premier, le troisième, etc..), on ne remet pas la boule piochée dans l'urne.
- lors des tirages de rang pair, on la remet.

On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui prend la valeur du rang amenant pour la première (resp. la dernière) fois la boule noire.
Par exemple, en piochant *Blanche, Noire, Blanche, Blanche, Noire, Blanche,...* on aurait $X = 2$ et $Y = 5$, alors qu'en piochant *Blanche, Blanche, Noire, Blanche, ...* on aurait $X = Y = 3$.

Pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, on note B_k (resp. N_k) l'évènement "la boule piochée au $k-$ième tirage est blanche (resp. noire)".

(1) Justifier que $X(\Omega) = [\![1, 2n-2]\!]$ et que $Y(\Omega) \subset [\![1, 2n-1]\!]$.

(2) **Simulation sous Python.**

(a) Montrer qu'un entier k est pair si et seulement si $2\lfloor k/2 \rfloor = k$.

(b) On rappelle que la commande `floor(x)` de la bibliothèque numpy renvoie la partie entière de `x`. Recopier et compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle renvoie une simulation de X et de Y. On représente l'obtention d'une boule noire par un 1 et d'une boule blanche par un 0.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    nN=1
    X=0
    k=0
    while nN == 1 :
        k=k+1
        p= ......
        boule = rd.binomial(1, p)
        if X == 0 :
            X=boule*k
        if 2*np.floor(k/2) .......... :
            nN=nN-boule
            n=n-1
    Y=....
    return [X,Y]
```

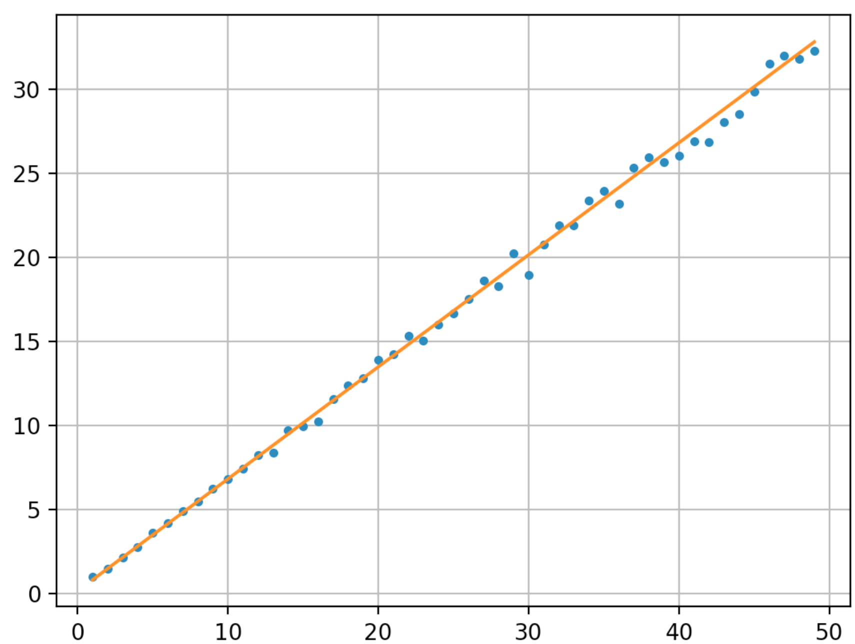
(c) On ajoute la fonction mystère suivante ainsi que les commandes ci-après dont l'exécution permet l'affichage ci-contre. Expliquer ce que fait la fonction mystère et émettre une conjecture sur X.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def mystere(n):
    X=np.zeros(1000)
    for k in range(1000):
        [x,y]=simul_XY(n)
        X[k]=x
    return np.mean(X)

N=[k for k in range(1,50)]
E=[mystere(n) for n in N]
D=[(2/3)*k+1/6 for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N,E)
plt.plot(N, D, '.')
plt.show()
```

Affichage Python



(3) **Loi de Y.**

(a) Montrer que si $j \in [\![1, 2n-1]\!]$ est pair, alors $P(Y = j) = 0$.
(b) Soit $j = 2i - 1$, avec $i \in [\![1, n]\!]$. Justifier que

$$[Y = 2i - 1] = \left(\bigcap_{k=1}^{i-2} B_{2k-1} \right) \cap N_{2i-1},$$

puis montrer, à l'aide de la formule des probabilités composées, que

$$P(Y = 2i - 1) = \frac{1}{n}.$$

(c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$ puis obtenir $E(Y) = n$.

Problème

On considère la fonction f définie sur $[0;1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1+\dfrac{1}{\ln(x)}\right), & \text{si } 0<x<1 \\ 0, & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Partie I - Étude de f

(1) Montrer que f est continue sur $[0;1[$.

(2) Déterminer l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ sur $]0;1[$.

(3) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

(4) (a) Montrer que f est dérivable en 0.
(b) Expliciter le développement limité d'ordre 1 de f en 0.
(c) Justifier que f est dérivable sur $]0;1[$ puis, pour $x\in]0;1[$, calculer $f'(x)$.

(5) On pose, pour $y\in\mathbb{R}$, $g(y)=y^2+y-1$.
(a) Dresser le tableau de signes de $g(y)$.
(b) Montrer que, pour tout $x\in]0;1[$, $f'(x)=\dfrac{g(\ln(x))}{\ln(x)^2}$.
(c) En déduire que

$$f'(x)\geq 0 \Longleftrightarrow x\leq x_0, \qquad \text{où} \quad x_0=\exp\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

(6) Dresser le tableau de variations de f.

(7) Représenter graphiquement l'allure de la courbe de f. On fera apparaître la tangente en 0.
On donne

$$e^{-1}\simeq 0.37, \qquad x_0\simeq 0.2, \qquad f(x_0)\simeq 0.08.$$

Partie II - Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0\in]0;x_0[, \qquad u_{n+1}=f(u_n).$$

(8) Montrer que, pour tout $x\in]0;1[$, $f(x)<x$ et en déduire que, pour $x\in[0;1[$, $f(x)=x$ si et seulement si $x=0$.

(9) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n\in]0;x_0[$.

(10) Montrer que (u_n) est monotone.

(11) En déduire que (u_n) converge vers une limite à préciser.

(12) Écrire une fonction Python d'en-tête `def pp_entier(u0) :` qui prend en argument la valeur de x_0 et calcule puis renvoie le plus petit entier n tel que $u_n\leq 10^{-3}$.

(13) Le but de cette dernière question est l'étude de la convergence de la série $\sum u_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_{n+1})^2 - \ln(u_n)^2$.
Montrer que la série de terme général v_n diverge.

(b) Rappeler un équivalent en 0 de $\ln(1+x)$ et de $(1+x)^2 - 1$.

(c) Montrer que

$$v_n = \ln(u_n)^2 \left[\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)} \right)^2 - 1 \right].$$

(d) Déduire des deux questions précédentes que $v_n \sim 2,\ n \to +\infty$.

(e) **On admet** que $\ln(u_n)^2 \sim 2n,\ n \to +\infty$.
Montrer que

$$n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n \ln^4(u_n)}{4},$$

puis que

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty.$$

(f) $(*)$ En déduire la nature de la série $\sum u_n$.