Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°1 - Math 1 - sujet B

Mercredi 9 Novembre
Solution

Les questions précédées de $(*)$ *sont réservées aux khubes.*

Exercice 1

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 2011**.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t, & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(1) (a) Par croissante de la fonction exponentielle, si $0 \leq t \leq x$, on a

$$\begin{aligned} 1 \leq e^t \leq e^x \quad &\Longrightarrow \quad 2 \leq e^t + 1 \leq e^x + 1 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^t+1} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) En multipliant par t l'encadrement précédent, on obtient

$$\frac{t}{e^x+1} \leq \frac{t}{e^t+1} \leq \frac{t}{2}$$

Par positivité de l'intégrale, il suit que

$$\frac{x^2}{2(e^x+1)} = \int_0^x \frac{t}{e^x+1}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{t\mathrm{d}t}{e^t+1} \leq \int_0^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t = x^2.$$

En multipliant par $2/x^2$, on a bien

$$\frac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

(c) Les deux termes qui encadrent $f(x)$ tendent tous deux vers $1/2$ en 0. Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(0),$$

et f est bien continue (à droite) en 0.

(2) (a) La fonction

$$\varphi : \ t \mapsto \frac{t}{e^t+1}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t$$

est alors la primitive de φ qui s'annule en 0. À ce titre, elle est bien sûr $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, la fonction

$$x \mapsto \frac{2}{x^2}$$

est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme multiple de l'inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas. Par produit, f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t + \frac{2}{x^2}\times\frac{x}{e^x+1} \\ &= -\frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t + \frac{4}{x^3}\times\frac{x^2}{2(e^x+1)} \\ &= -\frac{4}{x^3}g(x), \end{aligned}$$

où on a posé

$$g(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t - \frac{x^2}{2(e^x+1)}.$$

(b) On commence par dériver g

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x}{e^x+1} - \frac{4x(e^x+1)-2x^2e^x}{4(e^x+1)^2} \\ &= \frac{4x(e^x+1)-4x(e^x+1)+4x^2e^x}{4(e^x+1)^2} \\ &= \frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

quantité strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Étant clair que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (les mêmes arguments que pour le caractère $\mathcal{C}^1$ de f s'appliquent), g est en fait croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0)=0$, on peut conclure que $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$. Il suit alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x) < 0,$$

et f est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(3) (a) Observant que

$$\frac{t}{e^t+1} \leq 1 \Longleftrightarrow e^t+1 \geq t \Longleftrightarrow e^t \geq t-1$$

on peut par exemple voir que, pour tout $t>0$

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!} > 1+t > t-1.$$

(b) Par positivité de l'intégrale, l'inégalité précédente donne

$$0 \leq \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \mathrm{d}t = x$$

puis, en multipliant par $2/x^2$,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}.$$

Les deux termes qui encadrent $f(x)$ tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$, par le théorème des gendarmes, on peut conclure que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

(4) (a) D'après ce qui précède et grâce au théorème de bijection, f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\left]0; \frac{1}{2}\right]$.
En particulier, pour tout entier $n \geq 3$, $\frac{1}{n} \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$ et admet donc un unique antécédent, noté u_n, par f dans $\mathbb{R}_+$. Or,

$$f(x) = \frac{1}{n} \iff \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n} \iff \frac{2n}{x^2}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t = 1.$$

Ainsi, u_n est bien l'unique solution de (E_n).

(b) Le théorème de bijection permet d'affirmer que f^{-1} est également (continue) et strictement décroissante sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$. Ainsi, comme

$$f(u_n) = \frac{1}{n} \iff u_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

on a

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Longrightarrow u_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) > f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = u_n$$

et (u_n) est (strictement) croissante. En tant que suite croissante, (u_n) est soit convergente soit divergente vers $+\infty$ (par le théorème de convergence monotone). Ici, on peut dire, par continuité de f^{-1} sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$, que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{t\to0^+} f^{-1}(t) = +\infty.$$

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+3} = 4\,u_{k+2} - 5u_{k+1} + 2u_k.$$

(1) Petit programme classique. On oublie pas la variable auxiliaire, mais on a déjà fait ça et on est chaud.e bouillant.e.

```
def suite_rec_3(n, x, y, z) :
    u=x
    v=y
    w=z
    for k in range(3, n+1) :
        aux = 4*w-5*v+2*u
        u=v
        v=w
        w=aux
    return w
```

(2) (a) Si $u = (u_k)$ désigne la suite identiquement nulle, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_{k+1} = u_{k+2} = u_{k+3} = 0$ et la relation d'appartenance à $\mathcal{E}$ est clairement vérifiée, donc $u \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{E} \neq \emptyset$.

Considérons deux suites $u = (u_k)$ et $v = (v_k)$ de $\mathcal{E}$ et α, β deux réels. La suite $w = \alpha u + \beta v$ est la suite donc le terme de rang k vaut $w_k = \alpha u_k + \beta v_k$. Il suit que

$$\begin{aligned} w_{k+3} &= \alpha u_{k+3} + \beta v_{k+3} \\ &= \alpha(4\,u_{k+2} - 5u_{k+1} + 2u_k) + \beta(4\,v_{k+2} - 5v_{k+1} + 2v_k) \\ &= 4(\alpha u_{k+2} + \beta v_{k+2}) - 5(\alpha u_{k+1} + \beta v_{k+1}) + 2(\alpha u_k + \beta v_k) \\ &= 4\,w_{k+2} - 5w_{k+1} + 2w_k \end{aligned}$$

et donc $w \in \mathcal{E}$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est stable par combinaison linéaire et c'est un espace vectoriel.

(b) On définit l'application $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par $\varphi((u_k)) = (u_0, u_1, u_2)$.

(i) Soient $u = (u_k)$ et $v = (v_k)$ deux suites de $\mathcal{E}$ et α, β deux réels. En notant comme précédemment $w = \alpha u + \beta v$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha u + \beta v) &= \varphi(w) = (w_0, w_1, w_2) \\ &= (\alpha u_0 + \beta v_0, \alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2) \\ &= \alpha(u_0, u_1, u_2) + \beta(v_0, v_1, v_2) \\ &= \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v) \end{aligned}$$

et φ est bien linéaire.

(ii) Une suite de $\mathcal{E}$ est entièrement définie par la valeur de ses trois premiers termes. Pour tout triplet de réels (x, y, z), en définissant (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_1 = y \\ u_2 = z \end{cases}, \quad \text{puis, pour } k \in \mathbb{N}, \qquad u_{k+3} = 4\,u_{k+2} - 5u_{k+1} + 2u_k,$$

on définit une suite $(u_k) \in \mathcal{E}$ telle que $\varphi((u_k)) = (x, y, z)$. Ainsi, φ est surjective. De plus,

$$\begin{aligned} u = (u_k) \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(u) = 0 \\ &\iff u_0 = u_1 = u_2 = 0 \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = 0 \quad \text{(par une récurrence (forte) immédiate)} \\ &\iff u = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(\varphi)) = \{0\}$.

(iii) D'après ce qui précède, φ est surjective et injective donc bijective : c'est un isomorphisme. Ce qui implique que les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont nécessairement les mêmes. Ainsi,

$$\dim(\mathcal{E}) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

(c) Sans difficulté :

$$4(k+2) - 5(k+1) + 2k = k + 3$$

donc la suite $(k)_{k \geq 0}$ est bien élément de $\mathcal{E}$.

(d) Commençons par observer que $(q-1)^2(q-2) = q^3 - 5q^2 + 4q - 2$. Cette factorisation nous donne alors les racines du polynôme $q^3 - 5q^2 + 4q - 2$.
Considérons ensuite une suite géométrique $u = (q^k)$ éléments de $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} u = (q^k) \in \mathcal{E} &\iff q^{k+3} = 5q^{k+2} - 4q^{k+1} + 2q^k \\ &\iff q^k\left(q^3 - 5q^2 + 4q - 2\right) = 0 \\ &\iff q = 0 \quad \text{ou} \quad q = 1 \quad \text{ou} \quad q = 2 \end{aligned}$$

On cherche les suites géométriques (non identiquement nulles) éléments de $\mathcal{E}$ qui sont donc $(2^k)_{k\geq 0}$ et $(1)_{k\geq 0}$.

(e) On a trouvé avec les deux questions précédentes trois suites qui sont dans $\mathcal{E}$: (k), (1) et (2^k). Comme on sait que $\mathcal{E}$ est de dimension 3, il suffit de montrer que la famille formée par ces trois suites est libre pour qu'elle en forme une base. Soient donc α, β, γ trois réels tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \alpha 2^k + \beta + \gamma k = 0.$$

En particulier, en injectant les valeurs de $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$ on trouve le système

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta &=& 0 \\ 2\alpha+\beta+\gamma &=& 0 \\ 4\alpha+\beta+2\gamma &=& 0 \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta &=& 0 \\ -\beta+\gamma &=& 0 \\ -3\beta+2\gamma &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta &=& 0 \\ -\beta+\gamma &=& 0 \\ -\gamma &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \alpha=\beta=\gamma=0
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille est libre et forme donc une base de $\mathcal{E}$. On peut aussi écrire

$$\mathcal{E} = \mathrm{Vect}((2^k), (1), (k)).$$

(3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) On résout :

- Pour $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$:

$$\begin{aligned}
u=(x,y,z)\in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) &\iff (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 6x+3y-4z &=& 0 \\ -6x-3y+5z &=& 0 \\ 4x+2y-2z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 6x+3y-4z &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -2x \\ z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff u=(x,-2x,0)=x(1,-2,0)
\end{aligned}$$

Donc $(1, -2, 0)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ (qui est alors de dimension 1).

- Pour $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$:

$$\begin{aligned}
u=(x,y,z)\in \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id}) &\iff (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 5x+3y-4z &=& 0 \\ -6x-4y+5z &=& 0 \\ 4x+2y-3z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 5x+3y-4z &=& 0 \\ -2y+z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y \\ z &=& 2y \end{array}\right. \\
&\iff u=(y,y,2y)=y(1,1,2)
\end{aligned}$$

Donc $(1,1,2)$ forme une base de $\text{Ker}(f-2\text{id})$ (qui est alors de dimension 1).

(b) Pour que A soit semblable à T, il faut (et il suffit) de trouver une base (u,v,w) dans laquelle T représente f, c'est à dire une base (u,v,w) avec $f(u)=u$, $f(v)=u+v$ et $f(w)=2w$. D'après ce qui précède, on peut prendre $u=(1,-2,0)$ et $w=(1,1,2)$. Il reste à trouver $v=(x,y,z)$. On résout

$$\begin{aligned} f(v)=u+v &\iff (A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 6x+3y-4z &=& 1\\ -6x-3y+5z &=& -2\\ 4x+2y-2z &=& 0\end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 6x+3y-4z &=& 1\\ z &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& -1\\ z &=& -1\end{array}\right.\end{aligned}$$

En prenant $v=(0,-1,-1)$, cela fonctionne. Reste à vérifier que (u,v,w) est bien libre pour former une base de $\mathbb{R}^3$. C'est le cas (on laisse la résolution du système correspondant à l'équation de liaison au soin du lecteur ou de la lectrice).

(c) Il est clair que la matrice T vérifie $(T-I)^2(T-2I)=0$ (on omet aussi le calcul qui est facile et devrait figurer sur la copie). Comme T représente f dans la base (u,v,w), on en déduit que $(f-\text{id})^2\circ(f-\text{id})=0$ mais comme f est représenté dans la base canonique par A, alors $(A-I)^2(A-2I)=0$ et le polynôme $P(X)=(X-1)^2(X-2)$ est annulateur de A.

(d) $(*)$ Si c'était le cas, A serait diagonalisable. D'après ce qui précède, A ne peut avoir comme valeurs propres 1 et 2 (qui sont les racines du polynôme annulateur ci-dessus). Mais la dimension des sous-espaces propres correspondants n'étant pas égale à 3 (elle vaut 2 d'après ce qui précède), A n'est pas diagonalisable.

(4) On introduit le sous-espace $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{A}=\text{Vect}(I,A,A^2).$$

(a) Comme la famille est, par définition, génératrice de $\mathcal{A}$, il suffit de vérifier qu'elle est libre pour en former une base. Considérons α,β,γ trois réels tels que

$$\alpha I+\beta A+\gamma A^2=0$$

On pourrait résoudre le système correspondant (et trouver $\alpha=\beta=\gamma=0$) ce qui finirait de répondre à la question. On en a un peu marre des systèmes et on propose un autre raisonnement, assez instructif. Le polynôme $\alpha+\beta X+\gamma X^2$ est un polynôme annulateur (non nul) de A. Comme on a déjà dit que les valeurs propres de A étaient 1 et 2, ce polynôme admet nécessairement pour racines 1 et 2 et se factorise, du fait de son degré 2 sous la forme

$$\alpha+\beta X+\gamma X^2=\gamma(X-1)(X-2).$$

Sauf que, $(A-I)(A-2I)\neq 0$ (il faut faire le calcul pour s'en convaincre), donc $\gamma=0$. Mais alors, α et β aussi et on a la conclusion souhaitée.

(b) Soit $k\in\mathbb{N}$. On pourrait montrer que $A^k\in\mathcal{A}$ par récurrence, mais encore une fois, on ressent l'envie de davantage d'élégance. On écrit la division euclidienne de X^k par $(X-1)^2(X-2)$. Comme le polynôme diviseur est de degré 2, le reste $R(X)$ de cette division euclidienne est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 et s'écrit $R(X)=a_k+B_kX+c_kX^2$, et on a

$$X^k=Q(X)(X-1)^2(X-2)+a_k+B_kX+c_kX^2$$

en appliquant à A et du fait que $(A-I)^2(A-2I)=0$, on obtient

$$A^k=a_kI+B_kA+c_kA^2\in\text{Vect}(I,A,A^2)=\mathcal{A}.$$

Pour $k = 0$, on a $I = I + 0 \cdot A + 0 \cdot A^2$ donc $(a_0, b_0, c_0) = (1, 0, 0)$. Pour $k = 1$ et $k = 2$ le même raisonnement donne $(a_1, b_1, c_1) = (0, 1, 0)$ et $(a_2, b_2, c_2) = (0, 0, 1)$.

(c) Comme $A^3 = 4A^2 - 5A + 2I$ (on a développé le polynôme annulateur) et que $A^k = a_k I + b_k A + c_k A^2$ donne

$$A^{k+1} = a_k A + b_k A^2 + c_k(4A^2 - 5A + 2I) = 2c_k I + (a_k - 5c_k)A + (b_k + 4c_k)A^2$$

ce qui implique, par unicité des coordonnées dans une base que

$$\begin{cases} a_{k+1} &= 2c_k \\ b_{k+1} &= a_k - 5c_k \\ c_{k+1} &= b_k + 4c_k \end{cases}$$

et en injectant

$$c_{k+3} - 4c_{k+2} + 5c_{k+1} - 2c_k = b_{k+2} + 5c_{k+1} - 2c_k = a_{k+1} - 5c_{k+1} + 5c_{k+1} - 2c_k = 0$$

et on a bien que la suite (c_k) est élément de $\mathcal{E}$. On admet que de même les suites (b_k) et (a_k) sont dans $\mathcal{E}$.

(d) Comme $(c_k) \in \mathcal{E}$, on peut écrire

$$c_k = \alpha 2^k + \beta + \gamma k$$

comme $c_0 = c_1 = 0$ et $c_2 = 1$, on trouve

$$c_k = 2^k - 1 - k.$$

La même méthode (dont on omet toutes les étapes) donne

$$b_k = -2^{k+1} + 2 + 3k, \qquad a_k = 2^k - 2k.$$

Il suit que

$$A^k = (2^k - 2k)I + (-2^{k+1} + 2 + 3k)A + (2^k - 1 - k)A^2.$$

(e) Comme $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$, on peut écrire

$$A\left(\frac{5}{2}I - 2A + \frac{1}{2}A^2\right) = I$$

ce qui donne A inversible et

$$A^{-1} = \frac{5}{2}I - 2A + \frac{1}{2}A^2,$$

ce qui correspond à la formule précédente avec $k = -1$.

Exercice 3

Une urne contient initialement $n-1$ boules blanches et une boule noire. On vide entièrement cette urne en effectuant des tirages successifs comme suit :

- lors des tirages de rang impair (le premier, le troisième, etc..), on ne remet pas la boule piochée dans l'urne.
- lors des tirages de rang pair, on la remet.

On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui prend la valeur du rang amenant pour la première (resp. la dernière) fois la boule noire.

Pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, on note B_k (resp. N_k) l'évènement "la boule piochée au $k-$ième tirage est blanche (resp. noire)".

(1) On peut avoir la boule noire dès le premier tirage. Au, pire on peut attendre d'avoir vidé l'urne de ses boules blanches, ce qui veut dire que lors des $n-1$ premiers tirages pairs, on pioche une blanche, ainsi on aura forcément une boule noire au $2(n-1)+1 = (2n-2)-$ième tirage. Naturellement, il est possible d'avoir la noire lors de tous les tirages intermédiaires, ainsi on a bien $X(\Omega) = [\![1, 2n-2]\!]$.

En revanche, pour que ce soit la dernière fois qu'on obtienne la boule noire, il faut que ce tirage intervienne à un rang impair, ce qui arrive au plus tôt dès le premier tirage ou au plus tard, avec la justification précédente, un cran plus loin que le rang le plus tardif de la première noire (auquel cas on aurait toutes les blanches successivement et puis deux fois la noire). Ainsi, on a bien $Y(\Omega) \subset [\![1, 2n-1]\!]$.

(2) **Simulation sous Python.**

(a) Si k est pair, alors il existe un entier i tel que $k = 2i$. Il suit que $k/2 = i$ est encore un entier et donc $\lfloor k/2 \rfloor = i$ puis, $2\lfloor k/2 \rfloor = 2i = k$.
Réciproquement, comme $\lfloor k/2 \rfloor$ est un nombre entier, si $k = 2\lfloor k/2 \rfloor$, k peut donc s'écrire comme un multiple de 2 et c'est donc un nombre pair.

(b) Comme 1 représente l'obtention d'une boule noire, p est donc la probabilité d'en tirer une, qui vaut, à chaque tirage `nN/n`, c'est à dire le quotient du nombre `nN` de boules noires dans l'urne sur le nombre total n de boules. Comme on ne remet pas la boule dans le cas où le rang du tirage k est impair, il faut que `2*np.floor(k/2) != k` pour que ces nombres de boules soient modifiés. On s'arrête au rang du tirage de la dernière boule noire, donc `Y=k` à la fin de la boucle.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    nN=1
    X=0
    k=0
    while nN == 1 :
        k=k+1
        p= nN/n
        boule = rd.binomial(1, p)
        if X == 0 :
            X=boule*k
        if 2*np.floor(k/2) != k :
            nN=nN-boule
            n=n-1
    Y=k
    return [X,Y]
```

(c) Dans la fonction mystère, on simule 1000 fois les variables X et Y et la fonction renvoie la moyenne des simulations de X donc une *estimation* de l'espérance de X. On représente ensuite l'évolution de cette estimation en fonction de n. Il semble que $E(X)$ soit une fonction affine de n, et la droite orange également représentée permet d'en donner l'équation. On peut donc conjecturer que

$$E(X) = \frac{2}{3}n + \frac{1}{6}$$

ce qui, on laisse la preuve en exercice bonus, est vrai.

(3) **Loi de Y.**

(a) Soit $j \in [\![1, 2n-1]\!]$. $[Y = j]$ impose que j soit le rang d'un tirage après lequel on retire la boule noire, sinon il serait encore possible de la tirer. Or, on ne retire des boules de l'urne qu'après les tirages de rang impair. Donc, si j est pair, $[Y = j]$ n'est pas possible et $P(Y = j) = 0$.

(b) Soit $j = 2i - 1$ un entier impair de $Y(\Omega)$ (avec donc $i \in [\![1, n]\!]$).

$[Y = 2i - 1]$ si et seulement si on pioche pour la dernière fois la boule noire au tirage $2i - 1$, ce qui veut dire qu'on a pas pioché la boule noire à un tirage de rang impair antérieur, sinon celle-ci ne serait plus dans l'urne. Les résultats des tirages de rang pair ne jouent pas de rôle dans la description de $[Y = 2i - 1]$. Ainsi, $[Y = 2i - 1]$ si et seulement si tous les tirages de rang impair antérieur (et il y en a $(i - 2)$) ont amené une boule blanche, et on peut donc écrire

$$[Y = 2i-1] = \left(\bigcap_{k=1}^{i-2} B_{2k-1}\right) \cap N_{2i-1}.$$

Connaissant le nombre de boules blanches retirées, on connait la probabilité d'obtenir une blanche ou une noire à un nouveau tirage. D'après la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}
P(Y = 2i-1) &= P(B_1)P_{B_1}(B_3) \times ... \times P_{\bigcap_{k=1}^{i-3} B_{2k-1}}(B_{2i-3})P_{\bigcap_{k=1}^{i-2} B_{2k-1}}(N_{2i-1}) \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times ... \times \frac{n-1-(i-3)}{n-(i-3)} \times \frac{1}{n-(i-2)} \\
&= \frac{1}{n} \qquad \text{(par télescopage des quotients)}
\end{aligned}$$

(c) D'après les formules de sommes finies du cours (de première année)

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - n = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$$

comme demandé. Il suit que

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1)P(Y = 2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{n^2}{n} \\
&= n.
\end{aligned}$$

Problème

On considère la fonction f définie sur $[0; 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\right), & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I - Étude de f

(1) • La fonction f est continue sur $]0;1[$ comme produit et quotient de fonctions continues de dénominateur non nul ($\ln(x) \neq 0$ car $x \neq 1$).

• De plus : $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ par quotient donc $\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) = 1$. Ainsi, par produit $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

Finalement, f est continue sur $[0;1[$.

(2) On a :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Longleftrightarrow x\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow 1 + \frac{1}{\ln(x)} = 0 \quad \text{car } x \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{\ln(x)} = -1 \\ &\Longleftrightarrow \ln(x) = -1 \\ &\Longleftrightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique réel x de $]0;1[$ vérifiant $f(x) = 0$ est $x = e^{-1}$.

(3) On a : $\lim_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$ (car $\ln(x) < 0$ pour $x < 1$).
On a alors : $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln(x)} = -\infty$ par quotient donc $\lim_{x\to 1^-} x\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) = -\infty$ par somme et produit.
Ainsi, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

(4) (a) On calcule la limite du taux d'accroissement.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{(calcul déjà fait)}$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

(b) D'après Taylor-Young, ce DL est donné par

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = x + o(x)$$

En particulier, la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe de f en 0.

(c) La fonction f est dérivable sur $]0;1[$ comme produit et quotient de fonctions dérivables de dénominateur non nul ($\ln(x) \neq 0$ car $x \neq 1$). Pour tout x de $]0;1[$, on a :

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) + x\left(-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}\right) = 1 + \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln(x))^2}.$$

(5) On pose, pour $y \in \mathbb{R}$, $g(y) = y^2 + y - 1$.

(a) g est une fonction polynômiale de degré 2. Don discriminant est $\Delta = 5$ et donc ses racines sont

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 0, \qquad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0.$$

Le coefficient dominant étant positif, on en déduit le tableau de signe suivant :

y	$-\infty$		y_1		0		y_2		$+\infty$
$g(y)$		$+$	0		$-$		0	$+$	

(b) Comme $x \in]0;1[$, on a $y = \ln(x) \in]-\infty;0[$, soit $y \in \mathbb{R}_-^*$.
De plus, on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln(x))^2} = \frac{(\ln(x))^2 + \ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = \frac{g(y)}{y^2} = \frac{g(\ln(x))}{(\ln(x))^2}.$$

(c) On a :

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{g(y)}{y^2} \geq 0 \iff g(y) \geq 0.$$

Or, on a vu que $y \in \mathbb{R}_-^*$ donc d'après le tableau de signe de g, on a

$$\begin{cases} y < 0 \\ g(y) \geq 0 \end{cases} \iff y \leq y_1.$$

Ainsi, on a :

$$f'(x) \geq 0 \iff y \leq y_1 \iff \ln(x) \leq y_1 \iff x \leq e^{y_1} \quad \text{(par croissance de la fonction } t \mapsto e^t\text{)}$$

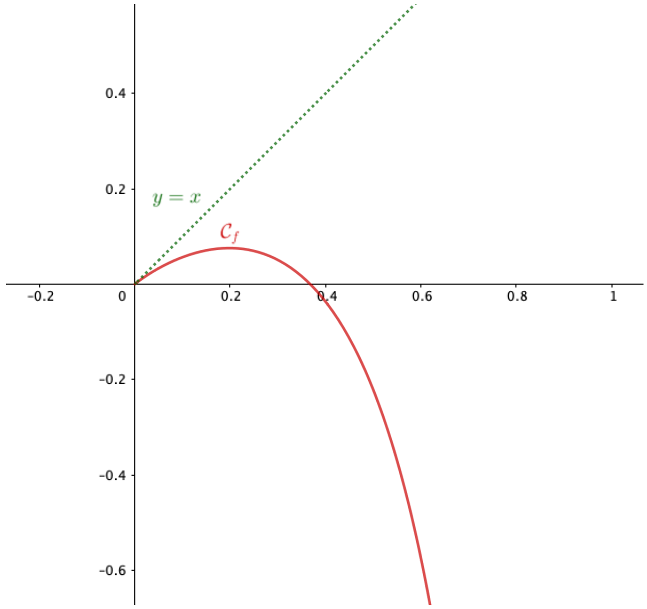
Comme $y_1 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, on a bien

$$f'(x) \geq 0 \iff x \leq x_0, \qquad \text{où } x_0 = \exp\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

(6) On déduit de ce qui précède le tableau de variations de f.

x	0		x_0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

(7) On représente alors l'allure de la courbe de f ainsi que la tangente en 0 d'équation $y = x$.



Partie II - Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in]0; x_0[, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(8) Pour tout x de $]0;1[$, on a :

$$f(x) - x = x\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) - x = \frac{x}{\ln(x)} < 0$$

par produit car $x > 0$ et $\ln(x) < 0$ (car $x < 1$). Ainsi, on a

$$\forall x \in]0;1[, \qquad f(x) < x.$$

Comme $f(0) = 0$ et qu'on vient de voir que $f(x) \neq x$ pour tout x de $]0;1[$, on a bien $f(x) = x$ si et seulement si $x = 0$.

(9) On procède par récurrence.

- initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 \in]0; x_0[$ par définition.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, u_n soit bien défini et que $u_n \in]0; x_0[$. Comme $x_0 < 1$, u_n appartient au domaine de définition de f donc $f(u_n) = u_{n+1}$ existe. Ainsi, u_{n+1} est bien défini. De plus, on a :

$$\begin{aligned} & 0 < u_n < x_0 \\ \Longrightarrow\quad & f(0) < f(u_n) < f(x_0) \qquad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur }]0;x_0[\\ \Longrightarrow\quad & 0 < u_{n+1} < f(x_0) < x_0 \qquad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} \in]0; x_0[$, ce qui termine la récurrence.

(10) On a vu que pour tout x de $]0;1[$, $f(x) < x$.
Or, comme $x_0 < 1$, on a $u_n \in]0; x_0[\subset]0;1[$ d'après la question précédente.
On peut donc poser $x = u_n$, ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = f(u_n) < u_n$$

Ainsi, la suite (u_n) est strictement décroissante.

(11) La suite (u_n) est strictement décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une certaine limite $\ell \in [0, x_0] \subset [0;1[$.
Comme f est continue sur $[0;1[$, on sait, par passage à la limite dans la relation de récurrence,

que ℓ vérifie l'équation $f(\ell)=\ell$ soit $\ell=0$ d'après la Question (8).
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(12) C'est un programme classique qui ne pose aucun problème. Comme u_n ne s'annule jamais, on n'a pas besoin de structure conditionnelle pour la définition de f.

```
import numpy as np

def pp_entier(u0) :
    n=0
    u=u0
    while u > 10**(-3) :
        n=n+1
        u = u*(1+1/np.log(u))
    return n
```

(13) Le but de cette dernière question est l'étude de la convergence de la série $\sum u_n$.

(a) On reconnait une somme télescopique. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} v_n &= \sum_{n=0}^{N}\left((\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2\right)\\ &= (\ln(u_{N+1}))^2 - (\ln(u_0))^2 \qquad \text{somme télescopique}\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

car $u_{N+1} \to 0$ donc $\ln(u_{N+1}) \to -\infty$ et $(\ln(u_{N+1}))^2 \to +\infty$.
Ainsi les sommes partielles divergent donc la série de terme général v_n diverge.

(b) D'après le cours et les équivalents usuels, on a, au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) \sim x \quad \text{et} \quad (1+x)^2 - 1 \sim 2x, \quad x \to 0.$$

(c) On commence par factoriser par $(\ln(u_n))^2$, ce qui donne :

$$(\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 = (\ln(u_n))^2\left[\frac{(\ln(u_{n+1}))^2}{(\ln(u_n))^2} - 1\right] = (\ln(u_n))^2\left[\left(\frac{\ln(u_{n+1})}{\ln(u_n)}\right)^2 - 1\right] \qquad (\star)$$

Or, on a :

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(f(u_n)) = \ln\left(u_n\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)\right) = \ln(u_n) + \ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)$$

donc

$$\left(\frac{\ln(u_{n+1})}{\ln(u_n)}\right) = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)}$$

ce qui donne la relation voulue en réinjectant dans $(\star)$.
Ainsi,

$$(\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 = (\ln(u_n))^2\left[\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)}\right)^2 - 1\right].$$

(d) Posons

$$a_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)}$$

de sorte que

$$(\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 = (\ln(u_n))^2 \left[(1+a_n)^2 - 1\right].$$

Comme $u_n \to 0$, on a $\ln(u_n) \to -\infty$ puis

$$1 + \frac{1}{\ln(u_n)} \longrightarrow 1$$

par quotient . Il suit que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right) \longrightarrow 0$$

par composition. Ainsi, par quotient, $a_n \to 0$.
On peut donc utiliser l'équivalent $(1+a_n)^2 - 1 \sim 2a_n$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
(\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 &= (\ln(u_n))^2 \left[(1+a_n)^2 - 1\right] \\
&\sim (\ln(u_n))^2\, 2a_n \sim 2\,(\ln(u_n))^2 \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)} \\
&\sim 2\,(\ln(u_n))^2 \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)} \sim 2\ln(u_n)\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right) \\
&\sim 2\ln(u_n)\frac{1}{\ln(u_n)} \qquad \text{car } \ln(1+x) \sim x \text{ et } \frac{1}{\ln(u_n)} \longrightarrow 0 \\
&\sim 2
\end{aligned}$$

et BAM ! *Fingers in the nose* ! voilà le résultat. Envoyez les autres questions...

(e) On admet que $(\ln(u_n))^2 \sim 2n$, ce qui donne par opérations valides sur les équivalents :

$$(\ln(u_n))^2 \sim 2n \implies n \sim \frac{(\ln(u_n))^2}{2} \implies n^2 \sim \frac{(\ln(u_n))^4}{4} \implies n^2 u_n \sim \frac{u_n\,(\ln(u_n))^4}{4}.$$

Pour montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, il s'agit de montrer que :

$$\lim_{+\infty} \frac{u_n}{1/n^2} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \lim_{+\infty} n^2 u_n = 0.$$

Or, on a

$$n^2 u_n \sim \frac{u_n\,(\ln(u_n))^4}{4}$$

donc

$$\lim_{+\infty} n^2 u_n = \lim_{+\infty} \frac{u_n\,(\ln(u_n))^4}{4} = 0$$

car $u_n \to 0$ et $x\ln(x)^4 \to 0,\ x \to 0$ par croissances comparées.
Ainsi,

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(f) $(*)$ D'après ce qui précède:

- $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
- La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente comme série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Donc par théorème de comparaison par négligeabilité pour des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge également.