Louis Merlin

CONCOURS BLANC 2 - 2ème ÉPREUVE CORRECTION

Première Partie : Fonctions et Lois Gamma et Beta

1. a. (i) L'exposant $a-1$ de la puissance est positif donc la fonction puissance $x \mapsto x^{a-1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. La fonction exp est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Le produit de fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ est défini et continu sur $\mathbb{R}$.

(ii) L'intégrale d'une fonction continue sur un segment fermé et borné $[0, A]$ existe toujours.

b. (i) On a $h(x) = \frac{x^{a-1}}{(e^x)^{1/2}}$ et on peut appliquer à cette expression de h le théorème de croissances comparées : on conclut directement que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

(ii) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que $h(x) \leqslant 1$ pour tout $x \geqslant A$ (c'est en fait la définition de la limite en $+\infty$). En multipliant l'inégalité $h(x) \leqslant 1$ par $e^{-x/2}$ qui est positif, on obtient $h(x)e^{-x/2} \leqslant e^{-x/2}$. Or $h(x)e^{-x/2} = x^{a-1}e^{-x}$ et on obtient l'inégalité cherchée pour $x \geqslant A$.

(iii) On cherche à appliquer un argument de comparaison :

- Les deux fonctions $x \mapsto x^{a-1}e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-x/2}$ sont positives sur $[A, +\infty[$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{-x/2}dx$ est convergente comme le montre le calcul explicite
$$\int_A^y e^{-x/2}dx = \left[-2e^{-x/2}\right]_A^y = -2e^{-y/2} + 2e^{-A/2} \to 2e^{-A/2}$$
lorsque $y \to +\infty$.
- Pour tout $x \in [A, +\infty[$, $x^{a-1}e^{-x} \leqslant e^{-x/2}$.

D'après le théorème de comparaison par majoration, on en déduit que $\displaystyle\int_A^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ est convergente.

c. D'après la relation de Chasles,
$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \int_0^A x^{a-1}e^{-x}dx + \int_A^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$
est la somme de deux intégrales convergentes donc est convergente.

2. a. (i) On réalise une intégration par parties sur $[0, t]$ avec les deux fonctions $u(x) = x^a$ et $v'(x) = e^{-x}$. On a donc $u'(x) = ax^{a-1}$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les deux fonctions sont $\mathcal{C}^1$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties. On obtient la formule annoncée.

(ii) Dans l'égalité précédente, on fait tendre t vers $+\infty$. Il se passe que

- $\lim\limits_{t\to+\infty} -t^a e^{-t} = 0$ par croissances comparées,
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \displaystyle\int_0^t x^a e^{-x}dx = \Gamma(a+1)$,

- $\lim_{t\to+\infty} a \int_0^t x^{a-1}e^{-x}dx = a\Gamma(a)$.

Par passage à la limite lorsque t tend vers $+\infty$, on obtient bien $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

b. (i) On a

$$\int_0^t x^{1-1}e^{-x}dx = \int_0^t e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^t = -e^{-t}+1.$$

Lorsque t tend vers $+\infty$ on a d'une part

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \Gamma(1),$$

et d'autre part

$$\lim_{t\to+\infty} -e^{-t}+1 = 1.$$

On a donc

$$\boxed{\Gamma(1) = 1.}$$

(ii) On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$ pour montrer les propriétés

$$\mathcal{P}_n : \text{"}\Gamma(n) = (n-1)!\text{"}.$$

- **Initialisation** : On vient de montrer que $\Gamma(1) = 1 = 0! = (1-1)!$.
- **Hérédité** : Supposons que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour un entier n arbitraire. Alors,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

On a utilisé pour la première égalité la question **2.a**(ii) et pour la deuxième l'hypothèse de récurrence. On montre ainsi la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

Par le principe de récurrence, toutes les propriétés $\mathcal{P}_n$ sont vraies, donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

3. a.

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (à une constante multiplicative près, ce qui ne change pas la continuité, c'est la même fonction que celle de la question **1.a**(i)). La fonction g_a est aussi continue sur $\mathbb{R}_-^*$ comme une constante. La continuité en 0 est sans intérêt (on peut montrer que g_a est continue en 0 mais ça n'est pas nécessaire).
- La fonction g_a est positive sur $\mathbb{R}$. En effet, sur $\mathbb{R}_+$, elle est le produit de deux fonctions positives et de la constante $\Gamma(a)$ qui est elle-aussi positive car c'est l'intégrale d'une fonction positive (positivité de l'intégrale). Sur $\mathbb{R}_-$, c'est évident.
- Enfin, pour calculer son intégrale, remarquons tout d'abord que $\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)dx = \int_0^{+\infty} g_a(x)dx$ car g_a est nulle sur $\mathbb{R}_-$. Puis $\int_0^{+\infty} g_a(x)dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x}dx$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ est convergente et vaut $\Gamma(a)$. Donc par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} g_a(x)dx$ est convergente et vaut $\frac{1}{\Gamma(a)}\Gamma(a) = 1$.

Toutes les conditions sont donc réunies pour que g_a soit la densité d'une variable aléatoire à densité.

b. (i) L'espérance de X, si elle existe est donnée par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg_a(x)dx = \int_0^{+\infty} x\frac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(a)}x^a e^{-x}dx.$$

En effet, la convergence absolue est équivalente à la convergence de cette intégrale (la fonction à intégrer est positive). La deuxième égalité vient du fait que g_a est nulle sur $\mathbb{R}_-$ [1]. On remarque que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-x}dx$ existe et vaut $\Gamma(a+1)$. Ainsi, $E(X)$ existe et vaut

$$\boxed{E(X) = \tfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = a.}$$

(ii) De la même manière, X admet un moment d'ordre 2 car $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a+1}e^{-x}$ est convergente. On obtient alors

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)} = (a+1)a\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = a(a+1)$$

(en utilisant deux fois la relation de **2.a**(ii)). Puis, d'après la formule de Konig-Huygens,

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = a(a+1) - a^2 = a.}$$

4. **a.** Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^t x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, on fait le changement de variables $x = tu$. Les bornes pour u deviennent 0 et 1 (quand x vaut t, u vaut $\frac{t}{t} = 1$ et quand x vaut 0, u vaut $\frac{0}{t} = 0$). dx devient tdu et enfin

$$x^{a-1}(t-x)^{b-1} = (tu)^{a-1}(t-tu)^{b-1} = t^{a-1}u^{a-1}t^{b-1}(1-u)^{b-1} = t^{a+b-2}u^{a-1}(1-u)^{b-1}.$$

On a donc

$$\int_0^t x^{a-1}(t-x)^{b-1}dx = \int_0^1 t^{a+b-2}u^{a-1}(1-u)^{b-1}tdu = t^{a+b-1}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du = t^{a+b-1}B(a,b).$$

b. On fait le changement de variables $u = 1-x$. Cette fois-ci les bornes sont inversées et dx devient $-du$, la fonction devient

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} = (1-u)^{a-1}u^{b-1}.$$

On obtient dont

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_1^0 u^{b-1}(1-u)^{a-1}(-du) = \int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{a-1}du = B(b,a).$$

c. On a

$$B(a,1) = \int_0^1 x^{a-1}dx = \left[\frac{1}{a}x^a\right]_0^1 = \frac{1}{a}.$$

d. (i) Dans l'intégrale qui définit $B(a,b+1)$, on fait l'intégration par parties en voyant la fonction $x \mapsto x^{a-1}(1-x)^b$ comme le produit de $u(x) = (1-x)^b$ et de $v'(x) = x^{a-1}$. On a $u'(x) = -b(1-x)^{b-1}$ et $v(x) = \frac{1}{a}x^a$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ et on peut donc faire une intégration par parties :

$$B(a,b+1) = \left[\frac{1}{a}x^a(1-x)^b\right]_0^1 + \frac{b}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}dx = \frac{b}{a}B(a+1,b).$$

(ii) On montre par récurrence les propriétés suivantes (attention aux quantificateurs !)

$$\mathcal{P}_b : \text{"}\forall a \in \mathbb{N}^* \quad B(a,b) = \frac{(b-1)!(a-1)!}{(a+b-1)!}.$$

- **Initialisation** : Pour $b = 1$ et pour tout $a \geqslant 1$, on a

$$B(a,1) = \frac{1}{a} = \frac{(1-1)!(a-1)!}{(a+1-1)!}$$

(la première égalité est celle de la question **4.c**), ce qui montre la propriété $\mathcal{P}_1$.

---

1. Ce que je ne commente plus dorénavant dans la suite de ce corrigé.

- **Hérédité** : On suppose que pour *un certain* b et *pour tout* a, on a
$$B(a,b) = \frac{(b-1)!(a-1)!}{(a+b-1)!}.$$
Vérifions donc la propriété $\mathcal{P}_{b+1}$. Prenons donc un a quelconque. On a déjà, d'après la question précédente,
$$B(a,b+1) = \frac{b}{a}B(a+1,b).$$
L'hypothèse de récurrence porte sur *tous* les entiers a. On a donc aussi
$$B(a+1,b) = \frac{(b-1)!a!}{(a+b)!},$$
puis
$$B(a,b+1) = \frac{b}{a}\cdot\frac{(b-1)!a!}{(a+b)!} = \frac{b!(a-1)!}{(a+b)!},$$
ce qui montre $\mathcal{P}_{b+1}$.

5. a. X et Y sont des variables positives (à support dans $\mathbb{R}_+$) donc la somme aussi puisque la somme de deux nombres positifs est positif. Ainsi, tous les nombres $t \geqslant 0$ ne sont pas dans le support de $X+Y$ et donc $h_{a,b}(t) = 0$.

b. On prend donc $t > 0$ et on a
$$h_{a,b}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)g_b(t-x)dx.$$
Or g_a et g_b sont nulles sur $\mathbb{R}_-$, ce qui signifie que si $x \leqslant 0$, $g_a(x) = 0$ et si $t - x \leqslant 0$ (c'est-à-dire $x \geqslant t$) alors $g_b(t-x) = 0$. Ainsi, on obtient
$$h_{a,b}(t) = \int_0^t g_a(x)g_b(t-x)dx = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x}\frac{1}{\Gamma(b)}(t-x)^{b-1}e^{-(t-x)}dx = \frac{e^{-t}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^t x^{a-1}(t-x)^{b-1}dx$$
Dans la dernière intégrale, on reconnaît l'expression de la question **4.a** ; elle vaut donc $B(a,b)t^{a+b-1}$. Ainsi
$$h_{a,b}(t) = \frac{B(a,b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}t^{a+b-1}e^{-t}.$$

c. On sait que $h_{a,b}$ est une densité de probabilités, donc en particulier, son intégrale existe sur $]-\infty,+\infty[$ et vaut 1. Or
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{a,b}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{B(a,b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}t^{a+b-1}e^{-t}dt = \frac{B(a,b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$
Puis, en divisant par $\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$, on obtient
$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

d. On remplace cette expression de $B(a,b)$ dans l'expression de la densité $h_{a,b}$ obtenue à la question **b** et on obtient, pour $t > 0$:
$$h_{a,b}(t) = \frac{B(a,b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}t^{a+b-1}e^{-t} = \frac{1}{\Gamma(a+b)}t^{a+b-1}e^{-t},$$
et pour $t \geqslant 0$,
$$h_{a,b}(t) = 0.$$
C'est exactement la densité d'une loi gamma de paramètre $a+b$.

6. a. On procède de manière identique à la loi gamma (question **3.a**) et on montre que
- La fonction $f_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $f_{a,b}$ est strictement positive sur $]0,1[$ et nulle sur son complémentaire (donc tous comptes faits, positive ou nulle).
- Son intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$ est en fait une intégrale entre 0 et 1 puisqu'elle est nulle en dehors de $[0,1]$. Puis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx = \int_0^1 f_{a,b}(x)dx = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{B(a,b)}{B(a,b)} = 1.$$

b. De la même façon que précédemment les intégrales à étudier pour l'espérance et le moment d'ordre 2 sont a priori des intégrales sur $\mathbb{R}$, mais en fait dans notre cas des intégrales sur $[0,1]$ uniquement puisque les fonctions à intégrer sont toujours nulles en dehors de $[0,1]$. L'espérance et le moment d'ordre 2 apparaissent alors comme des intégrales de fonctions continues sur $[0,1]$, ce qui règle déjà le problème de leur convergence. Pour le calcul, on a

$$E(X) = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 x\cdot x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} = \frac{\frac{(b-1)!a!}{(a+b)!}}{\frac{(b-1)!(a-1)!}{(a+b-1)!}} = \frac{a}{a+b}.$$

c. Et

$$E(X^2) = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)} = \frac{\frac{(b-1)!(a+1)!}{(a+b+1)!}}{\frac{(b-1)!(a-1)!}{(a+b-1)!}} = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}.$$

Puis,

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 = \frac{a(a+1)(a+b)-a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Deuxième Partie : Évolution de l'opinion d'un individu

7. a. C'est une question de cours, l'espérance de loi de Bernoulli est son paramètre :

$$\boxed{E(X_i) = \alpha_i.}$$

b. C'est aussi une question de cours :

$$\boxed{\mathrm{Var}(X_i) = \alpha_i(1-\alpha_i).}$$

c. (i) Comme indiqué, on procède par récurrence et on montre les propriétés

$$\mathcal{P}_i = \text{Il existe une fonction } g_i \text{ telle que } X_i = g_i(Z_0,\cdots,Z_i)\text{''}.$$

- **Initialisation** : La première étape est donnée par l'énoncé et on a $X_0 = Z_0$ de sorte que $g_0(Z_0) = Z_0$.
- **Hérédité** : Supposons la propriété $\mathcal{P}_i$ vraie pour un entier i arbitraire :

$$X_i = g_i(Z_0,\cdots,Z_i)$$

pour une certaine fonction g_i. Alors on a

$$X_{i+1} = (1-Z_{i+1})X_i + Z_{i+1}(1-X_i)$$

d'après le texte. Et donc

$$X_{i+1} = (1-Z_{i+1})g_i(Z_0,\cdots,Z_i) + Z_{i+1}(1-g_i(Z_0,\cdots,Z_i).$$

On constate que X_{i+1} ne dépend que des variables $Z_0,\cdots,Z_{i+1}$ (et que la dépendance est donnée par $X_{i+1} = g_{i+1}(Z_0,\cdots,Z_{i+1})$ avec

$$g_{i+1}(Z_0,\cdots,Z_{i+1}) = (1-Z_{i+1})g_i(Z_0,\cdots,Z_i) + Z_{i+1}g_i(Z_0,\cdots,Z_i)).$$

C'est donc que la propriété $\mathcal{P}_{i+1}$ est vraie.

(ii) Puisque $X_{i-1} = g_{i-1}(Z_0,\cdots,Z_{i-1})$, il suffit d'utiliser le lemme des coalitions pour montrer que X_{i-1} est indépendante de Z_i.

d. D'après ce qui précède $(1-Z_i)$ est indépendante de X_{i-1} et Z_i est indépendante de $(1-X_{i-1})$. Par ailleurs l'espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes est égale au produit des espérances (et l'espérance d'une somme est toujours égales à la somme des espérances). On a donc

$$\begin{aligned} \alpha_i &= E(X_i) \\ &= E(1-Z_i)E(X_{i-1}) + E(Z_i)E(1-X_{i-1}) \\ &= (1-E(Z_i))\,E(X_{i-1}) + E(Z_i)\,(1-E(X_{i-1})) \\ &= (1-p_i)\alpha_{i-1} + p_i(1-\alpha_{i-1}). \end{aligned}$$

e. (i) On applique la relation précédente (avec $k = i-1$ et donc $k+1 = i$). On a

$$\alpha_{k+1} = (1-p_{k+1})\alpha_k + p_{k+1}(1-\alpha_k) = \frac{1-p_{k+1}}{2} + \frac{p_{k+1}}{2} = \frac{1}{2}.$$

(ii) On procède par récurrence sur les entiers $i \geqslant k$ pour montrer que

$$\mathcal{P}_i : \text{"}\alpha_i = \frac{1}{2}\text{"}.$$

- **Initialisation** : Le premier indice i à considérer est l'indice $i = k$. Or on a supposé que $p_k = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\alpha_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\alpha_{i-1} + \frac{1}{2}(1-\alpha_{i-1}) = \frac{1}{2}.$$

  On a donc montré que $\mathcal{P}_k$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\alpha_i = \frac{1}{2}$ pour un entier i arbitraire. Alors d'après ce qui précède, on a aussi $\alpha_{i+1} = \frac{1}{2}$ (l'entier k de la question précédente est un entier quelconque et ce qu'on a démontré s'applique en particulier à $k = i$). Donc $\mathcal{P}_{i+1}$ est vraie.

f. (i) On a

$$\begin{aligned} \alpha_i - \frac{1}{2} &= (1-p_i)\alpha_{i-1} + p_i(1-\alpha_{i-1}) - \frac{1}{2} \\ &= \alpha_{i-1} - p\alpha_{i-1} + p - p\alpha_{i-1} - \frac{1}{2} = (1-2p)\alpha_{i-1} + p - \frac{1}{2} \\ &= (1-2p)\left(\alpha_{i-1} - \frac{\frac{1}{2}-p}{1-2p}\right) \\ &= (1-2p)\left(\alpha_{i-1} - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

(ii) La suite $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie $\beta_{i+1} = (1-2p)\beta_i$ d'après la question précédente. Elle est donc géométrique de raison $(1-2p)$ [2]. On a donc

$$\beta_i = (1-2p)^i\,\beta_0.$$

Or $\alpha_0 = E(X_0) = E(Z_0) = p_0 = p$ et on a $\beta_0 = p - \frac{1}{2}$. Finalement

$$\beta_i = (1-2p)^i\left(p - \frac{1}{2}\right).$$

(iii) On a $\alpha_i = \beta_i + \frac{1}{2}$, c'est-à-dire

$$\alpha_i = (1-2p)^i\left(p - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

2. Ici on a fait l'hypothèse que $1-2p \neq 0$ (car $p \neq \frac{1}{2}$), ce qui signifie que la raison de la suite est non nulle donc que la suite est non constante.

(iv) La suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite géométrique de terme général $(1-2p)^i$ converge, c'est-à-dire si et seulement si la raison $1-2p$ de cette suite est dans l'intervalle $]-1,1[$. Or

$$-1 < 1-2p < 1 \Leftrightarrow -2 < -2p < 0 \Leftrightarrow 0 < 2p < 2 \Leftrightarrow 0 < p < 1.$$

C'est l'hypothèse qui est faite sur p et on conclut que la suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge toujours. Une suite géométrique convergente converge vers 0 et on conclut finalement que

$$\lim_{i\to+\infty} \alpha_i = \frac{1}{2}.$$

8. **a.** C'est très classique (on rappelle qu'on suppose tout au long du sujet que les bibliothèques usuelles sont importées) :

```
def simul_Z(p) :
  if rd.rand()<p :
    return 1
  else :
    return 0
```

b.

```
def Suite_X(n) :
  X=[Z(p(0))]
  for k in range(n) :
    X.append((1-simul_Z(p(i)))*X[i-1] + simul_Z(p(i))*(1-X[i-1])
  return X
```

9. Avant toute chose, remarquons que l'événement A_i est aussi égal à l'événement $[Z_i = 0]$.

a. Prenons $i \neq j$. D'après la remarque précédente, $P(A_i \cap A_j) = P((Z_i = 0) \cap (Z_j = 0)) = P(Z_i = 0)P(Z_j = 0)$ car les variables Z_i sont indépendantes. On retrouve bien

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

b. Dans le même esprit,

$$P(A_i) = P(Z_i = 0) = 1 - p_i.$$

c. (i) Si $B_{n,k+1}$ se réalise alors, pour tout $i \in [\![n, n+k+1]\!]$, $X_i = X_n$ et en particulier $X_i = X_n$ pour tous les indices $i \in [\![n, n+k]\!]$, c'est-à-dire que $B_{n,k}$ se réalise. On a donc $B_{n,k+1} \subset B_{n,k}$.

(ii) On a évidemment

$$B_{n,k} = [X_n = X_{n+1}] \cap \cdots \cap [X_{n+k-1} = X_{n+k}] = \bigcap_{i=n+1}^{n+k} A_i.$$

(iii) Puisque les événements A_i sont indépendants, on calcule la probabilité de leur intersection par le produit des probabilités : on a bien

$$P(B_{n,k}) = P\left(\bigcap_{i=n+1}^{n+k} A_i)\right) = \prod_{i=n+1}^{n+k} P(A_i) = \prod_{i=n+1}^{n+k} (1-p_i).$$

d. (i) On a

$$B_n = \bigcap_{k\geqslant 0} B_{n,k}.$$

Or la suite des événements $(B_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. On a donc

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_{n,k}\right) = \lim_{k\to+\infty} P(B_{n,k}).$$

(ii) Puisque l'événement B_n signifie que la suite $(X_i)_i$ est constante à partir du moment n, on a bien $B_n \subset B_{n+1}$ (si une suite est constante à partir du moment n, elle est constante à partir du moment $n+1$).

e. Cette fois la suite $(B_n)_n$ est croissante et donc

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$

10. **a.** Si la série $\sum_{i\geqslant 0} p_i$ est convergente, alors en particulier, la suite $(p_i)_i$ tend vers 0. Puis $\ln(1-p_i)$ converge par composition vers $\ln(1) = 0$. Donc

$$\lim_{i\to+\infty} x_i = 0.$$

b. On a donc, puisque $\lim p_i = 0$, $\ln(1-p_i) \underset{i\to+\infty}{\sim} -p_i$, puis $x_i \underset{i\to+\infty}{\sim} p_i$. Par ailleurs $p_i \geqslant 0$ (c'est une probabilité). Et aussi $1-p_i \leqslant 1$ donc $\ln(1-p_i) \leqslant 0$ et finalement $x_i \geqslant 0$. On peut donc appliquer le théorème de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs et conclure que $\sum_{i\geqslant 0} x_i$ converge aussi.

c. On a

$$\ln\left(P(B_{n,k})\right) = \ln\left(\prod_{i=n+1}^{n+k}(1-p_i)\right) = \sum_{i=n+1}^{n+k} \ln(1-p_i)$$

en utilisant le calcul de $P(B_{n,k})$ de la question **9.c**(iii). On va maintenant passer à la limite dans les deux membres de cette égalité. D'une part, $\lim_{k\to+\infty} P(B_{n,k}) = P(B_n)$ et comme la fonction ln est continue, on a aussi

$$\lim_{k\to+\infty} \ln(P(B_{n,k})) = \ln(P(B)).$$

D'autre part, puisque la série converge $\sum_i \ln(1-p_i)$ converge d'après la question précédente (si une série converge, son opposé aussi), alors la série $\sum_{i\geqslant n+1} \ln(1-p_i)$ converge et sa somme est $\sum_{i=n+1}^{+\infty} \ln(1-p_i) = -\sum_{i=n+1}^{+\infty} x_i$. On conclut donc, par passage à la limite lorsque k tend vers $+\infty$ que

$$\ln(P(B)) = -\sum_{i=n+1}^{+\infty} x_i,$$

ou encore en prenant l'exponentielle des deux membres :

$$P(B) = \exp\left(-\sum_{i=n+1}^{+\infty} x_i\right).$$

d. On fait maintenant tendre n vers $+\infty$ dans les deux membres de l'égalité précédente. D'après la question **9.e**, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P(B).$$

Pour le deuxième membre, il suffit de constater que $\sum_{i=n+1}^{+\infty} x_i$ est le reste d'une série convergente, et ce reste tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=n+1}^{+\infty} x_i = 0.$$

En composant par la fonction exp qui est continue, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\sum_{i=n+1}^{+\infty} x_i\right) = \exp(0) = 1.$$

Donc, par passage à la limite dans l'égalité de la question précédente, on obtient

$$P(B) = 1\,[3].$$

Troisième Partie : Urne de Pòlya

11. **a.** En effet d'après le texte, $R_0 = r$ et $V_0 = v$ donc $R_0 + V_0 = r + v$.

b. À chaque tirage, on remplace une boule par deux boules et on fait donc augmenter le nombre total de boules de 1. On a donc $R_n + V_n = R_0 + V_0 + n = r + v + n$.

12. **a.** L'événement $[R_n = i]$ signifie qu'il y a i boules rouges dans l'urne après n tirages, et donc $r+v+n$ boules en tout d'après la question précédente. Puisque la probabilité de piocher chaque boule est uniforme, la probabilité de piocher une boule rouge dans une telle urne est égale au nombre de boules rouges, divisé par le nombre totale de boules, c'est-à-dire

$$P_{[R_n=i]}(A_{n+1}) = \frac{i}{r+v+n}.$$

b. On a

$$P_{[R_n=i]}(R_{n+1} = i+1) = P_{[R_n=i]}(A_{n+1}) = \frac{i}{r+v+n}.$$

Puis

$$P_{[R_n=i]}(R_{n+1} = i) = P_{[R_n=i]}(\overline{A_{n+1}}) = 1 - P_{[R_n=i]}(A_{n+1}) = 1 - \frac{i}{r+v+n} = \frac{r+v+n-i}{r+v+n}.$$

c.

```python
def Polya(r,v,n) :
  R=[r]
  for k in range(n) :
    if rd.rand()<R[k]/(r+v+k) :
      R.append(R[k]+1)
    else :
      R.append(R[k])
  return R
```

13. **a.** (i) On a,

- Si $s_1 = 0$, d'une part

$$P(R_1 = r + s_1) = P(R_1 = r) = P(V_1) = \frac{v}{r+v}$$

et d'autre part

$$\frac{(r+s_1-1)!}{(r-1)!}\frac{(v+r-s_1-1)!}{(v-1)!}\frac{(r+v-1)!}{r+v+n-1)!} = \frac{(r-1)!}{(r-1)!}\frac{(v+1-1)!}{(v-1)!}\frac{(r+v-1)!}{(r+v+1-1)!} = \frac{v}{r+v}$$

- Si $s_1 = 1$, d'une part

$$P(R_1 = r + s_1) = P(R_1 = r+1) = P(R_1) = \frac{r}{r+v}$$

et d'autre part

$$\frac{(r+s_1-1)!}{(r-1)!}\frac{(v+r-s_1-1)!}{(v-1)!}\frac{(r+v-1)!}{r+v+n-1)!} = \frac{(r)!}{(r-1)!}\frac{(v-1)!}{(v-1)!}\frac{(r+v-1)!}{(r+v+1-1)!} = \frac{r}{r+v}$$

La formule est donc valable pour $n = 1$ et pour toute valeur de s_1.

3. Une magnifique apparition de la loi du tout ou rien, très classique dans les sujets de Maths 2

(ii) Le protocole expérimental de la $(n+1)$-ème étape ne dépend que de la composition de l'urne après le n-ième tirage, et pas de la façon dont l'urne s'est remplie au cours du temps. C'est exactement ce que signifie cette formule. [4]

(iii) Comme indiqué, on raisonne par récurrence sur n et on montre les propriétés :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}\forall(s_1,\cdots,s_n),\quad P((R_1=r+s_1)\cap(R_2=r+s_2)\cap\cdots\cap(R_n=r+s_n)) = \frac{(r+s_n-1)!}{(r-1)!}\frac{(v+n-s_n-1)!}{(v-1)!}\frac{(r+v-1)!}{(r+v+n-1)!}\text{"}.$$

L'**initialisation** a été faite à la question (i).

Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang n et on calcule la probabilité

$$P((R_1=r+s_1)\cap(R_2=r+s_2)\cap\cdots\cap(R_n=r+s_n)\cap(R_{n+1}=r+s_{n+1}))$$

avec la formule des probabilités composées :

$$P((R_1=r+s_1)\cap(R_2=r+s_2)\cap\cdots\cap(R_n=r+s_n)\cap(R_{n+1}=r+s_{n+1}))$$

$$= P((R_1=r+s_1)\cap(R_2=r+s_2)\cap\cdots\cap(R_n=r+s_n))\cdot[P_{[(R_1=r+s_1)\cap(R_2=r+s_2)\cap\cdots\cap(R_n=r+s_n)]}(R_{n+1}=r+s_{n+1})$$

$$= P((R_1=r+s_1)\cap(R_2=r+s_2)\cap\cdots\cap(R_n=r+s_n))\cdot P_{[R_n=r+s_n]}(R_{n+1}=r+s_{n+1})$$

d'après la question précédente. On utilise alors l'hypothèse de récurrence :

$$P((R_1=r+s_1)\cap(R_2=r+s_2)\cap\cdots\cap(R_n=r+s_n)\cap(R_{n+1}=r+s_{n+1}))$$

$$= \frac{(r+s_n-1)!}{(r-1)!}\frac{(v+n-s_n-1)!}{(v-1)!}\frac{(r+v-1)!}{(r+v+n-1)!}\cdot P_{[R_n=r+s_n]}(R_{n+1}=r+s_{n+1}).$$

Pour montrer la propriété au rang $n+1$, on distingue deux cas, selon si $s_{n+1}=s_n$ ou $s_{n+1}=s_n+1$. Dans le cas où $s_{n+1}=s_n$, on a

$$P_{[R_n=r+s_n]}(R_{n+1}=r+s_{n+1}) = P_{[R_n=r+s_n]}(R_{n+1}=r+s_n) = P_{[R_n=s_n]}(\overline{A_{n+1}}) = \frac{v+n-s_n}{r+v+n}.$$

On reporte la valeur de la probabilité conditionnelle dans le calcul de $[P((R_1=r+s_1)\cap(R_2=r+s_2)\cap\cdots\cap(R_n=r+s_n)\cap(R_{n+1}=r+s_n))$ (on rappelle que $s_{n+1}=s_n$ ici) et on trouve

$$P((R_1=r+s_1)\cap(R_2=r+s_2)\cap\cdots\cap(R_n=r+s_n)\cap(R_{n+1}=r+s_n))$$

$$= \frac{(r+s_n-1)!}{(r-1)!}\frac{(v+n-s_n-1)!}{(v-1)!}\frac{(r+v-1)!}{(r+v+n-1)!}\cdot\frac{v+n-s_n}{r+v+n} = \frac{(r+s_n-1)!}{(r-1)!}\frac{(v+n-s_n)!}{(v-1)!}\frac{(r+v-1)!}{(r+v+n)!},$$

ce qui est la formule attendue au rang $n+1$ dans ce cas $(s_{n+1}=s_n)$.

On traite enfin le cas où $s_{n+1}=s_n+1$. On a dans un premiers temps :

$$P_{[R_n=r+s_n]}(R_{n+1}=r+s_{n+1}) = P_{[R_n=r+s_n]}(R_{n+1}=r+s_n+1) = P_{[R_n=s_n]}(A_{n+1}) = \frac{r+s_n}{r+v+n}.$$

On reporte la valeur de la probabilité conditionnelle dans le calcul de $[P((R_1=r+s_1)\cap(R_2=r+s_2)\cap\cdots\cap(R_n=r+s_n)\cap(R_{n+1}=r+s_n))$ (on rappelle que $s_{n+1}=s_n+1$ ici) et on trouve

$$P((R_1=r+s_1)\cap(R_2=r+s_2)\cap\cdots\cap(R_n=r+s_n)\cap(R_{n+1}=r+s_n+1))$$

$$= \frac{(r+s_n-1)!}{(r-1)!}\frac{(v+n-s_n-1)!}{(v-1)!}\frac{(r+v-1)!}{(r+v+n-1)!}\cdot\frac{r+s_n}{r+v+n} = \frac{(r+s_n)!}{(r-1)!}\frac{(v+n-(s_n+1))!}{(v-1)!}\frac{(r+v-1)!}{(r+v+n)!},$$

ce qui est la formule attendue au rang $n+1$ dans ce cas $(s_{n+1}=s_n+1)$.

---

4. Peut-être faudrait-il trouver un argument plus convaincant...

b. Nous avions établi que $B(a,b) = \frac{(b-1)!(a-1)!}{(a+b-1)!}$ (pour des entiers comme ce sera le cas d'application ici, c'est la question **4.d**(ii) ; pour des valeurs non entières, il faut remplacer la fonction ! par la fonction gamma, comme dans la question **5.c** mais ce n'est pas ce qui sera utilisé ici). Ainsi

$$\frac{B(r+s_n, v+n-s_n)}{B(r,v)} = \frac{\frac{(r+s_n-1)!(v+n-s_n-1)!}{(r+s_n+v+n-s_n-1)}}{\frac{(r-1)!(v-1)!}{(r+v-1)!}} = \frac{(r+s_n-1)!}{(r-1)!}\frac{(v+n-s_n-1)!}{(v-1)!}\frac{(r+v-1)!}{(r+v+n-1)!},$$

ce qui coïncide avec l'expression de

$$P((R_1 = r+s_1) \cap (R_2 = r+s_2) \cap \cdots \cap (R_n = r+s_n)).$$

c. (i) $s_n = k$ peut aussi s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) + s_1 = k.$$

Or chacun des n nombres $s_{i+1} - s_i$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et s_1 peut prendre la valeur 0 ou 1. Pour que $s_n = k$, il faut donc qu'il y ait k de ces n nombres qui prennent la valeur 1 et $n-k$ qui prennent la valeur 0 : il faut donc choisir k nombres parmi les n et il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.

(ii) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements

$$(R_1 = r+s_1) \cap (R_2 = r+s_2) \cap \cdots \cap (R_{n-1} = r+s_{n-1}),$$

avec tous les choix possibles de $s_1, \cdots, s_{n-1}$ tels que $s_n = k$. D'après la question précédente, il y a $\binom{n}{k}$ événements dans notre SCE et d'après la question d'encore avant, tous ces événements ont la même probabilité $\frac{B(r+k,v+n-k)}{B(r,v)}$. Ainsi

$$\begin{aligned} P(R_n = r+k) &= \sum_{s_1,\cdots s_{n-1} \text{ tq } s_n=k} P((R_1 = r+s_1) \cap (R_2 = r+s_2) \cap \cdots \cap (R_n = r+k)) \\ &= \sum_{s_1,\cdots s_{n-1} \text{ tq } s_n=k} \frac{B(r+k, v+n-k)}{B(r,v)} \\ &= \binom{n}{k} \frac{B(r+k, v+n-k)}{B(r,v)}. \end{aligned}$$

(iii) On part du membre de droite

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} f_{r,v}(x) dx &= \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \frac{1}{B(r,v)} x^{r-1} (1-x)^{v-1} dx \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{B(r,v)} \int_0^1 x^{k+r-1} (1-x)^{n-k+v-1} dx \\ &= \binom{n}{k} \frac{B(k+r, n-k+v)}{B(r,v)} \end{aligned}$$

, ce qui est bien la formule obtenue pour $P(R_n = r+k)$.

d. On peut interpréter la formule intégrale de la manière suivante, pour faire apparaître la loi binomiale W_n^x de paramètres n et x :

$$\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} f_{r,v}(x) dx = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f_{r,v}(x) dx = \int_0^1 P(W_n^x = k) f_{r,v}(x) dx.$$

Autrement dit, en faisant le changement d'indices $j = r+k$, on a

$$P(R_n = j) = \int_0^1 P(W_n^x = j-r) f_{r,v}(x) dx.$$

Puis, comme R_n est une variable discrète,

$$P(R_n \leqslant l) = \sum_{j=0}^{l} P(R_n = j).$$

En remplaçant chaque valeur de $P(R_n = j)$ par la formule intégrale précédente, on obtient

$$P(R_n \leqslant l) = \sum_{j=0}^{l} \int_0^1 P(W_n^x = j - r) f_{r,v}(x) dx.$$

Enfin, par linéarité de l'intégrale,

$$P(R_n \leqslant l) = \int_0^1 \sum_{j=0}^{l} P(W_n^x = j - r) f_{r,v}(x) dx.$$

Puisque W_n^x est elle-même une variable discrète, on reconnaît dans l'intégrale l'expression de $P(W_n^x \leqslant l - r)$, ce qui donne finalement

$$P(R_n \leqslant l) = \int_0^1 P(W_n^x \leqslant l - r) f_{r,v}(x) dx.$$

14. a. $E(W_n^x) = nx$ (sans commentaires...)

b. On a d'après le cours $var(W_n^x) = nx(1 - x)$. Nous allons donc montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $x(1 - x) \leqslant \frac{1}{4}$. Pour cela, posons $f(x) = x(1 - x)$ pour $x \in [0, 1]$. On a

$$f'(x) = 1 - 2x$$

de sorte que la dérivée s'annule en $1/2$ et les variations de f montrent facilement que $f(1/2)$ est un maximum pour f. Or $f(1/2) = 1/4$ et on obtient bien l'inégalité voulue.

c. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebycehv, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(|W_n^x - nx| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(W_n^x)}{\varepsilon^2}.$$

En réinjectant la majoration de la variance de la question précédente, on obtient bien

$$P\left(|W_n^x - nx| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{n}{4\varepsilon^2}.$$

d. L'événement $[|W_n^x - nx| > \varepsilon]$ peut s'écrire

$$[|W_n^x - nx| > \varepsilon] = [W_n^x - nx > \varepsilon] \cup [W_n^x - nx < -\varepsilon].$$

(rappel $|y| > \varepsilon \Leftrightarrow y > \varepsilon$ ou $y < -\varepsilon$). On a donc

$$[W_n^x - nx < -\varepsilon] \subset [|W_n^x - nx| > \varepsilon]$$

et en particulier

$$P\left([W_n^x - nx < -\varepsilon]\right) \leqslant P\left([|W_n^x - nx| > \varepsilon]\right),$$

ce qui signifie, avec la majoration précédente que

$$P\left([W_n^x - nx < -\varepsilon]\right) \leqslant \frac{n}{4\varepsilon^2}.$$

On applique cette inégalité à $\varepsilon = n^{2/3}$. On a

$$P\left([W_n^x - nx < -\varepsilon]\right) = P\left(\left[W_n^x < nx - n^{2/3}\right]\right)$$

et

$$\frac{n}{4\varepsilon^2} = \frac{n}{4n^{4/3}} = \frac{1}{4} n^{-1/3},$$

donc

$$P\left(\left[W_n^x < nx - n^{2/3}\right]\right) \leqslant \frac{1}{4} n^{-1/3},$$

ce qu'on voulait.
On procède à l'identique pour la deuxième majoration

$$P\left(\left[W_n^x > nx + n^{2/3}\right]\right) \leqslant \frac{1}{4}n^{-1/3},$$

en utilisant cette fois que

$$[W_n^x - nx > \varepsilon] \subset [|W_n^x - nx| > \varepsilon]$$

puis en l'appliquant aussi à $\varepsilon = n^{2/3}$.

e. Remarquons que

$$\begin{aligned} x \geqslant \frac{m}{n} + n^{-1/3} \quad &\Leftrightarrow \quad nx \geqslant m + n^{2/3} \\ &\Leftrightarrow \quad m \leqslant nx - n^{2/3}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $x \geqslant \frac{m}{n} + n^{-1/3}$, alors

$$[W_n^x < m] \subset \left[W_n^x < nx - n^{2/3}\right]$$

et

$$P(W_n^x < m) \leqslant P(W_n^x < nx - n^{2/3}) \leqslant \frac{1}{4}n^{-1/3}.$$

On procède de même pour la deuxième inégalité (en utilisant la deuxième inégalité de la question précédente). On montre successivement que

$$x \leqslant \frac{m}{n} - n^{-1/3} \Leftrightarrow m \geqslant nx + n^{2/3},$$

puis donc, pour $x \leqslant \frac{m}{n} - n^{-1/3}$,

$$[W_n^x > m] \subset \left[W_n^x > nx - n^{2/3}\right]$$

et

$$P(W_n^x > m) \leqslant P(W_n^x > nx + n^{2/3}) \leqslant \frac{1}{4}n^{-1/3}.$$

15. C'est la vraie question difficile de l'épreuve. L'hypothèse sur la limite de $\frac{m_n}{n}$ ne sert pas à grand chose dans les questions **a,b,c**, si ce n'est à garantir que les deux nombres $\frac{m_n}{n} - n^{-1/3}$ et $\frac{m_n}{n} + n^{-1/3}$ sont contenus dans l'intervalle $[0, 1]$ et que m est un entier plus petit que n (ce qui est indispensable pour utiliser les majorations de la question **14.e**), au moins à partir d'un certain rang N (ce qui suffit pour ce que nous allons faire puisqu'on cherche à faire tendre n vers $+\infty$). Dans toutes les parties de cette question, nous supposerons donc que $n \geqslant N$.

a. Puisqu'on intègre sur l'intervalle $\left[\frac{m_n}{n} + n^{-1/3}, 1\right]$, tous les x considérés ici vérifient $x \geqslant \frac{m_m}{n} + n^{-1/3}$. On a donc

$$0 \leqslant P\left(\left[W_n^x < nx - n^{2/3}\right]\right) \leqslant \frac{1}{4}n^{-1/3}$$

, puis

$$0 \leqslant P\left(\left[W_n^x < nx - n^{2/3}\right]\right) \leqslant \frac{1}{4}n^{-1/3} f_{r_v}(x)$$

car $f_{r,v}$ est une densité de probas donc positive. Par positivité de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_{\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}}^{1} P(W_n^x \leqslant m_n) f_{r,v}(x)dx \leqslant \frac{n^{-1/3}}{4} \int_{\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}}^{1} f_{r,v}(x)dx.$$

Or, à nouveau parce que $f_{r,v}$ est positive et en utilisant la positivité de l'intégrale, on a

$$\int_{\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}}^{1} f_{r,v}(x)dx \leqslant \int_0^1 f_{r,v}(x)dx = 1.$$

On obtient donc la majoration

$$0 \leqslant \int_{\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}}^{1} P(W_n^x \leqslant m_n) f_{r,v}(x)dx \leqslant \frac{n^{-1/3}}{4}.$$

On fait enfin tendre n vers $+\infty$. Les deux membres extrémaux de l'inégalité tendent vers 0 et on en déduit par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}}^{1} P(W_n^x \leqslant m_n) f_{r,v}(x)dx = 0.$$

b. La question est particulièrement difficile, il faut exploiter le fait que l'on intègre une fonction bornée sur un intervalle qui se rétrécit lorsque n augmente. On a d'une part

$$0 \leqslant P(W_n^x \leqslant m_n) \leqslant 1$$

(comme toute probabilité). On pourrait aussi montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant f_{r,v}(x) \leqslant 1,$$

puis conclure par croissance de l'intégrale. Cette majoration n'est pas du tout triviale, et le fait que $f_{r,v}$ soit une densité de probabilité n'aide en rien puisqu'une densité peut (exceptionnellement) prendre des valeurs très grande (penser à une gaussienne de très petite variance par exemple qui prend des valeurs très grande autour de la moyenne).

Voici une autre façon, plus abstraite mais légèrement plus efficace de répondre à la question. On note $F_{r,v}$ la fonction de répartition d'une loi de probabilité de densité $f_{r,v}$. Après avoir encadré la probabilité $P(W_n^x \leqslant m_n)$ entre 0 et 1, on a donc, par positivité de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_{\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}}^{\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}} P(W_n^x \leqslant m_n) f_{r,v}(x)dx \leqslant \int_{\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}}^{\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}} f_{r,v}(x)dx = F_{r,v}\left(\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}\right) - F_{r,v}\left(\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}\right).$$

Or $F_{r,v}$ est une fonction de répartition d'une variable à densité, et c'est en particulier une fonction continue. Une fonction continue F en ℓ vérifie la propriété suivante : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers ℓ,

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = F(\ell).$$

C'est ce qu'on utilise ici pour calculer la limite du membre de droite de la précédente inégalité. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m_n}{n} + n^{-1/3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{m_n}{n} - n^{-1/3} = t.$$

Donc par continuité de $F_{r,v}$:

$$\lim_{n\to+\infty} F_{r,v}\left(\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}\right) - F_{r,v}\left(\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}\right) = F_{r,v}(t) - F_{r,v}(t) = 0.$$

On conclut maintenant sur la limite de l'intégrale par le théorème des gendarmes.

c. C'est exactement le même raisonnement que pour la question **a**.

d. On utilise à nouveau un raisonnement qui fait intervenir la fonction de répartition $F_{r,v}$ de la loi à densité $f_{r,v}$. On a

$$\int_0^{\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}} f_{r,v}(x)dx = F_{r,v}\left(\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}\right) - F_{r,v}(0)$$

et on a déjà remarqué que

$$\lim_{n\to+\infty} F_{r,v}\left(\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}\right) = F_{r,v}(t).$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}} f_{r,v}(x)dx = F_{r,v}(t) - F_{r,v}(0) = \int_0^t f_{r,v}(x)dx.$$

e. D'après la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(W_n^x \leqslant m_n) f_{r,v}(x)dx &= \int_0^{\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}} P(W_n^x \leqslant m_n) f_{r,v}(x)dx \\ &+ \int_{\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}}^{\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}} P(W_n^x \leqslant m_n) f_{r,v}(x)dx \\ &+ \int_{\frac{m_n}{n}+n^{-1/3}}^{1} P(W_n^x \leqslant m_n) f_{r,v}(x)dx.\end{aligned}$$

Les deuxième et troisième termes du membre de droite tendent vers 0 d'après ce que nous venons de voir. Il reste à s'occuper du premier terme. Or

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}} P(W_n^x \leqslant m_n) f_{r,v}(x)dx &= \int_0^{\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}} \left(1 - P(W_n^x > m_n)\right) f_{r,v}(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}} f_{r,v}(x)dx - \int_0^{\frac{m_n}{n}-n^{-1/3}} P(W_n^x > m_n) f_{r,v}(x)dx\end{aligned}$$

Or on sait que le premier terme de cette somme tend vers 0 et que le deuxième tend vers $\int_0^t f_{r,v}(x)dx$. Finalement, on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P(W_n^x \leqslant m_n) f_{r,v}(x)dx = \int_0^t f_{r,v}(x)dx.$$

16. **a.** On a

$$P(Y_n \leqslant t) = P\left(\frac{R_n}{n+r+v} \leqslant t\right) = P(R_n \leqslant (n+r+v)t)).$$

Or R_n est un entier, donc si R_n est inférieur au réel $(n+r+v)t$, il est aussi inférieur à l'entier qui est le plus grand inférieur ou égal à $(n+r+v)t$, c'est à dire $\lfloor (n+r+v)t \rfloor$

b. Il s'agit maintenant simplement de conclure, et de voir qu'on peut appliquer le résultat de la question **15**. Posons donc $m_n = \lfloor (n+r+v)t \rfloor$. D'après un argument classique qui utilise l'encadrement de la partie entière et le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m_n}{n} = t.$$

Nous allons donc pouvoir utiliser la question **15**. Or

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leqslant t) = \lim_{n\to+\infty} P(R_n \leqslant m_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P(W_n^x \leqslant m_n - r) f_{r,v}(x)dx,$$

d'après la question **13.d**.

Il reste encore une (grosse) difficulté que je traite rapidement pour ne pas alourdir trop ce texte. Il s'agit de montrer que

$$P(W_n^x \leqslant m_n - r) \underset{n\to+\infty}{\sim} P(W_n^x \leqslant m_n)$$

(il faudrait d'ailleurs aussi justifier que l'équivalent passe sous l'intégrale, ce qui est vrai dans ce cas mais que je ne ferai pas). Intuitivement le résultat est clair : le support de la binomiale augmente et donc la probabilité de se retrouver dans un ensemble fini et fixé (indépendant de n) de valeurs tend vers 0. Voyons comment concrétiser cette intuition. Ce passage peut être sauté en première lecture.

On a

$$P(W_n^x \leqslant m_n - r) = P(W_n^x \leqslant m_n) - P(m_n - r < W_n^x \leqslant m_n),$$

et la démarche revient à montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P(m_n - r < W_n^x \leqslant m_n) = 0.$$

Pour cela on utilise le théorème centrale limite et le fait que

$$P(m_n - r < W_n^x \leqslant m_n) = P\left(\frac{m_n - nx - r}{\sqrt{nx(1-x)}} < \frac{W_n^x - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \leqslant \frac{m_n - nx}{\sqrt{nx(1-x)}}\right).$$

Lorsque n est grand, cette probabilité peut être approchée par

$$\Phi\left(\frac{m_n - nx}{\sqrt{nx(1-x)}}\right) - \Phi\left(\frac{m_n - nx - r}{\sqrt{nx(1-x)}}\right)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On constate alors que l'intervalle $\left[\frac{m_n-nx-r}{\sqrt{nx(1-x}}, \frac{m_n-nx}{\sqrt{nx(1-x}}\right]$ a une longueur qui tend vers 0 et donc (puisque la densité usuelle de la loi normale centrée réduite est bornée) cette probabilité tend vers 0 (plus de détails sur demande).

Finalement donc on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leqslant t) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P(W_n^x \leqslant m_n) f_{r,v}(x)dx = \int_0^t f_{r,v}(x)dx.$$