Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°2 - Math 1 - sujet A

Mercredi 8 Mars
Durée : 4 heures

Exercice 1

Partie 1 - Réduction et puissances d'une matrice 3×3

Dans cette première partie, on considère les matrices $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - \dfrac{1}{3}I$.

(1) Déterminer le rang de B. En déduire une valeur propre immédiate de B.

(2) Écrire un programme Python d'en-tête `def poly_mat(P, M) :` qui, prenant en argument une liste `P=[`a_0`, `a_1`, ..., `a_n`]` et une matrice carrée M renvoie la matrice

$$a_0 I + a_1 M + \ldots + a_n M^n.$$

(3) On suppose la fonction précédente écrite correctement. À l'aide des instructions ci-dessous et de leur résultat d'exécution présenté ci-contre, déterminer un polynôme annulateur de B.

```
import numpy as np

B=np.array([[0, 1/3, 1/3], [2/3, 0, 0], [2/3, 0, 0]])
P=[0, -4, 0, 9]
print(poly_mat(P, B))
```

Affichage Python

```
> > >
[[0., 0., 0.]
[0., 0., 0.]
[0., 0., 0.]]
```

(4) Déterminer une matrice diagonale D de dernière ligne nulle et une matrice inversible P de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ telles que $B = PDP^{-1}$.

(5) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $B^j = PD^jP^{-1}$.

(6) Expliciter la matrice P^{-1}.

(7) Établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$A^k = P\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}D^j\right)P^{-1}.$$

(8) Expliciter, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la première ligne de A^k.

Partie 2 - Une chaîne de Markov à trois états

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante.

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k-$ieme tirage.
- On procède au premier tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k-$ieme tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  - soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)-$ieme tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)-$ieme tirage.
  - soit X_k a pris la valeur j, différente de 1. Dans ce cas on procède également au $(k+1)-$ieme tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

(9) Reconnaître la loi de X_1.

(10) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable X_k, l'entier k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(k) :
    x= ......
    for i in range(k-1) :
        tirage = rd.randint(1,4)
        if x == 1 :
            x= ......
        else :
            if tirage != x :
                x = ....
    return x
```

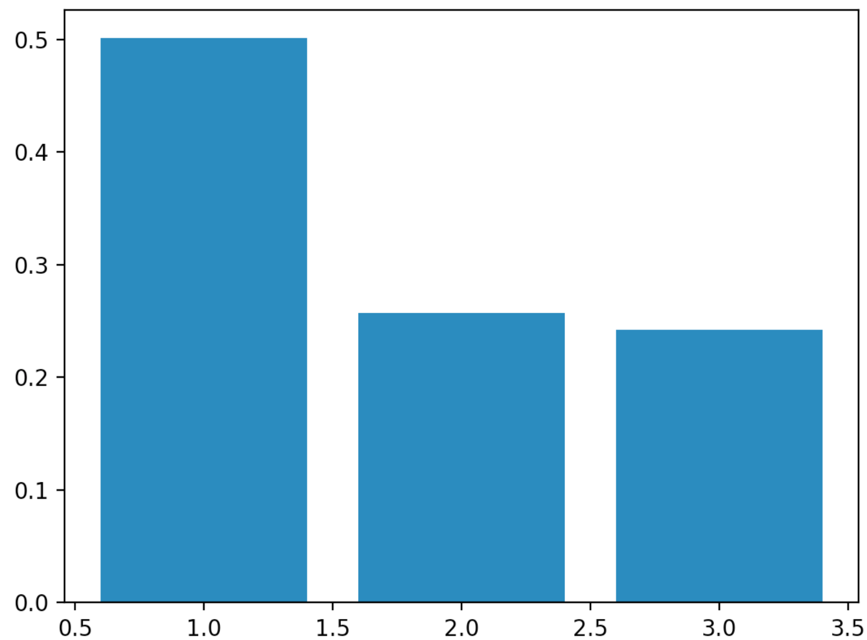
(11) On ajoute les commandes suivantes. Expliquer précisément ce qu'elles font. On joint la figure obtenue après leur exécution. Que peut-on conjecturer ?

```
import matplotlib.pyplot as plt

n=50
freq_etats=np.zeros(3)
for k in range(1000):
freq_etats[simul_X(n)-1]+=1
```

```
freq_etats = freq_etats/1000
plt.bar([1,2,3], freq_etats)
plt.show()
```

Affichage Python



(12) On note U_k la matrice à 1 ligne et 3 colonnes dont l'élément de la $j-$ieme colonne est $P(X_k = j)$ (c'est à dire le $k-$ième état probabiliste de la chaîne (X_k)).

(a) Déterminer les probabilités $P_{[X_k=i]}(X_{k+1} = j)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

(b) Représenter le graphe probabiliste à trois états associé à la chaîne de Markov (X_k).

(c) On admet que $\{[X_k = i] : \; i \in [\![1; 3]\!]\}$ est un système complet d'évènements.
Vérifier rigoureusement, grâce à la formule des probabilités totales, que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $U_{k+1} = U_k A$, où A est la matrice de la Partie 1.

(d) Déterminer l'état stable $\Pi \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ de la chaîne. Commenter.

(e) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = U_0 A^k$.

(f) Montrer que la loi de X_k est donnée, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

(g) Montrer que (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

(h) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.

Exercice 2

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) \ = \ \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie 1 : Étude de la fonction g

(1) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

(2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$$

(a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que : $h(\alpha) = 0$. Justifier : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

(c) Démontrer : $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} h(x), g(x)$.

(d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

(3) Démontrer :

$$g(x) - x^2 \sim \ -x\,\ln(x), \qquad x \to +\infty.$$

Partie 2 : Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \ = \ g(u_n)$$

(4) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et : $u_n > 0$.

(5) Écrire une fonction Python qui prend en argument un réel `u0` et un entier `n` et renvoie sous forme de matrice ligne la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite (u_n) de premier terme $u_0 =$ `u0`.

(6) (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x > 0$.

(b) Démontrer : $\forall x > 0$, $\dfrac{g(x)}{x} \geq 1$.

(c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geq x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

(7) Étudier les variations de la suite (u_n).

(8) **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

(a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

(b) En déduire que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

(9) **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 > 1$.

(a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

(b) Démontrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

(10) **Dans cette question uniquement**, on suppose : $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Partie 3 : Extrema de la fonction f

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note :

$$f(x,y) \;=\; x^{y-\frac{1}{x}} \;=\; \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right).$$

(11) Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

(12) Démontrer :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} \partial_1 f(x,y) & = & \dfrac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2}\, f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) & = & \ln(x)\, f(x,y) \end{cases}$$

(13) Montrer que la fonction f admet un unique point critique a et préciser les coordonnées de a.

(14) Montrer que la matrice hessienne de f au point a est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(15) La fonction f admet-elle en a un extremum local ?

(16) Démontrer que la fonction f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 3

Partie 1 : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V, et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.

On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty; 0[$ et continues sur $[0; +\infty[$.

(1) (a) Justifier
$$\forall t \in [0; +\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t) f_V(t) \leqslant f_V(t).$$
(b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\mathrm{d}t$ converge.

On admet le résultat suivant :
$$\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt = \mathbb{P}([U \leqslant V]).$$

(2) En déduire que
$$P([U > V]) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t)) f_V(t)\mathrm{d}t.$$

(3) **Exemple :** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

(a) Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.
(b) En déduire : $P([U > V]) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Partie 2 : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.

On définit ensuite la variable N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

(a) Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $P([M_n > t])$.
(b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$. Reconnaître la loi de M_n et préciser son(ses) paramètre(s).

(5) (a) Montrer que
$$P([N = 1]) = P([T_1 \leqslant T_0]) = \frac{1}{2}.$$
(b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[N > n] = [M_n > T_0]$. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $P([N > n])$ en fonction de n.
(c) Montrer alors que
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad P([N = n]) = \frac{1}{n(n+1)}.$$
(d) En déduire la valeur de $P([N = 0])$.

(6) La variable aléatoire N admet-elle une espérance?