Concours Blanc n°2 - Math 1 - sujet A

Mercredi 8 Mars
Solution

Exercice 1

Cet exercice est plus ou moins inspiré d'une annale du sujet **EDHEC 2010**.

Partie 1 - Réduction et puissances d'une matrice 3×3

Dans cette première partie, on considère les matrices $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - \frac{1}{3}I$.

(1) On commence par former la matrice $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On observe que les deux dernières colonnes de B sont les mêmes mais les deux premières sont clairement non colinéaires. Ainsi, les deux premières colonnes de B forment une base de son image et donc $\text{rg}(B) = 2$. En particulier, B n'est pas inversible et 0 en est une valeur propre.

(2) On rappelle que la commande `matrix_power(M, k)` de la bibliothèque `numpy.linalg` (qu'on importe sous l'alias `al`) renvoie la puissance k d'une matrice M. Le programme s'écrit alors avec une boucle `for`.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def poly_mat(P,M) :
    m=len(M)
    n=len(P)
    X=P[0]*np.eye(m)
    for k in range(1, n+1):
        X=X+P[k]*al.matrix_power(M, k)
    return X
```

(3) La matrice B est bien celle explicitée ci-dessus et le polynôme P est

$$P(X) = -4X + 9X^3 = X(9X^2 - 4)$$

le résultat affiché correspondant à la matrice nulle, on en déduit que P est un polynôme annulateur de B.

(4) Le polynôme annulateur P explicité ci-dessus admet pour racines 0, 2/3 et $-2/3$. Si on sait déjà que 0 est bien valeur propre, il faut vérifier que les deux autres racines le sont bien également, tout en déterminant une base de chaque sous-espace propre associé. C'est parti.

- Pour 2/3.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(B - \frac{2}{3}I\right) \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+z & = & 0 \\ 2x-2y & = & 0 \\ 2x-2z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & x \\ y & = & x \end{array}\right.$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, 2/3 est bien valeur propre et $E_{2/3}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour $-2/3$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(B + \frac{2}{3}I\right) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 0 \\ 2x+2y & = & 0 \\ 2x+2z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -x \\ y & = & -x \end{array}\right.$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $-2/3$ est bien valeur propre et $E_{-2/3}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour 0.

On sait déjà que 0 est valeur propre et comme le rang de B vaut 2, on sait que la dimension de son noyau vaut 1. Il suffit de trouver un vecteur non nul dans le noyau de B pour avoir une base. Comme les deux dernières colonnes de B (images par la multiplication par B des deux derniers vecteurs de la base canonique) sont les mêmes, on en déduit que $e_2 - e_3$ est dans le noyau de B et ainsi

$$E_0(B) = \operatorname{Ker}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On a trois valeurs propres distinctes, on peut extraire par concaténation une famille de vecteurs de propres de B composée de 3 vecteurs qui est libre et forme donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ rendant ainsi B diagonalisable. En posant

$$D = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

la formule de changement de base donne bien

$$B = PDP^{-1}$$

et les matrices D et P satisfont bien les conditions demandées.

(5) C'est une récurrence classique déjà rencontrée de nombreuses fois.

- initialisation. Pour $j = 1$, on a bien $B^1 = B = PDP^{-1}$ d'après la question précédente.
- hérédité. Supposons que pour un certain $j \in \mathbb{N}^*$, on ait $B^j = PD^jP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} B^{j+1} &= B^jB \\ &= PD^jP^{-1}PDP^{-1} \qquad \text{(HR)} \\ &= PD^jDP^{-1} \\ &= PD^{j+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

et la récurrence est terminée.

(6) On inverse la matrice P à l'aide d'un pivot de Gauss simultané.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Ainsi, on peut conclure que $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(7) Rappelons que $A = B + \dfrac{1}{3}I$ et les matrices commutent. Par la formule du binôme, on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B^j \left(\frac{1}{3}I\right)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} B^j$$

Maintenant, on insère la formule pour B^j et on factorise à gauche par P et à droite par P^{-1}.

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} B^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} (PD^jP^{-1}) = P\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} D^j\right) P^{-1},$$

ce qui est bien la formule attendue.

(8) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
La première ligne de A^k est obtenue par le produit : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^k$.
De plus, d'après la question précédente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} PD^jP^{-1}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} PD^jP^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2/3)^j & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2/3)^j & -(-2/3)^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\left((2/3)^j + (-2/3)^j\right) & (2/3)^j - (-2/3)^j & (2/3)^j - (-2/3)^j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Observant maintenant que

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} = 1, \qquad \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^{j} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}$$

ce qui donne alors, pour première ligne de A^k :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) & 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{pmatrix}.$$

Partie 2 - Une chaîne de Markov à trois états

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante.

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k-$ieme tirage.
- On procède au premier tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k-$ieme tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  - soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)-$ieme tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)-$ieme tirage.
  - soit X_k a pris la valeur j, différente de 1. Dans ce cas on procède également au $(k+1)-$ieme tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

(9) Après le premier tirage, la valeur de X_1 est celle de la boule piochée, choisie donc uniformément parmi les numéros de boules disponibles. On reconnait donc la loi $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 3]\!])$.

(10) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.

Ce programme se complète sans difficulté, tant la description de l'expérience suggère immédiatement de distinguer la valeur *stockée* dans la variable `x` pour savoir si elle vaut 1 ou une autre valeur. On rappelle que `rd.randint(1,4)` permet de simuler la loi $\mathcal{U}([\![1, 3]\!])$.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

```

```
def simul_X(k) :
    x= rd.randint(1,4)
    for i in range(k-1) :
        tirage = rd.randint(1,4) # on fait une nouvelle pioche
        if x == 1 :
            x= tirage
        else :
            if tirage != x : # si pioche différente de x
                x = 1 # et sinon x ne change pas
    return x
```

(11) Les commandes précédentes permettent d'avoir la fréquence de passage dans chacun des 3 étants pour X_{50} lors de 1000 simulations de celle-ci. Les résultats sont représentés sous forme de diagramme à bâtons. On voit que

$$P(X_{50} = 1) \simeq 0,5, \qquad P(X_{50} = 2) = P(X_{50} = 3) \simeq 0,25$$

Comme $n = 50$ est une valeur assez grande, on peut conjecturer que (X_n) converge en loi vers la variable Z vérifiant $Z(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$$P(Z = 1) = 1/2, \qquad P(Z = 2) = P(Z = 3) = 1/4.$$

(12) On note U_k la matrice à 1 ligne et 3 colonnes dont l'élément de la $j-$ieme colonne est $P(X_k = j)$ (c'est à dire le $k-$ième état probabiliste de la chaîne (X_k)).

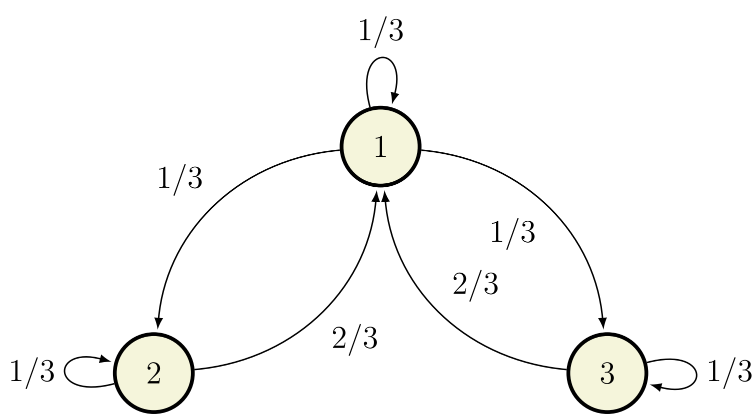
(a) Sachant que $[X_k = 1]$, X_{k+1} peut prendre chacune des trois valeurs avec la même probabilité. Par contre, sachant $[X_k \neq 1]$ on va garder la même valeur avec probabilité $1/3$ et prendre la valeur 1 avec probabilité $2/3$, ce qui s'écrit

$$P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 1) = P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 2) = P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 3) = \frac{1}{3}$$

et pour $j \neq 1$,

$$P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = 1) = \frac{2}{3}, \qquad P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = j) = \frac{1}{3}.$$

(b) Ce graphe découle des probabilités conditionnelles ci-dessus :



(c) On admet que $\{[X_k = i] : \ i \in [\![1; 3]\!]\}$ est un système complet d'évènements. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = 1) &= P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 1) + P_{[X_k=2]}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 2) + P_{[X_k=3]}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 3) \\ &= \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{2}{3}P(X_k = 2) + \frac{2}{3}P(X_k = 3) \end{aligned}$$

De manière analogue

$$\begin{aligned} P(X_{k+1}=2) &= P_{[X_k=1]}(X_{k+1}=2)P(X_k=1)+P_{[X_k=2]}(X_{k+1}=2)P(X_k=2)+P_{[X_k=3]}(X_{k+1}=2)P(X_k=3) \\ &= \frac{1}{3}P(X_k=1)+\frac{1}{3}P(X_k=2) \end{aligned}$$

et

$$P(X_{k+1}=3)=\frac{1}{3}P(X_k=1)+\frac{1}{3}P(X_k=3)$$

ce qui se traduit bien matriciellement par

$$U_{k+1}=U_kA,$$

où $A=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 2/3 & 1/3 & 0\\ 2/3 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$ est la matrice de la Partie 1.

(d) On sait que

$$\begin{aligned} \Pi=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} \text{ état stable de la chaîne} &\iff \Pi A=\Pi \text{ et } x+y+z=1 \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1\\ x+2y+2z &=& 3x\\ x+y &=& 3y\\ x+z &=& 3z\end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1/2\\ y &=& 1/4\\ z &=& 1/4\end{array}\right. \end{aligned}$$

On observe que les composantes de Π sont les valeurs de la loi limite conjecturée ci-avant... Sans surprise; si (X_n) converge, cela ne peut être que vers un état stable.

(e) On sait qu'on a, pour tout $k\geq 1$, $U_{k+1}=U_kA$. Une récurrence donne alors, pour tout $k\geq 1$, $U_k=U_1A^{k-1}$. Observant que

$$U_1=\begin{pmatrix}P(X_1=1) & P(X_1=2) & P(X_1=3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}=U_0A$$

(où on a posé $U_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$), on a bien finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k=U_0A^k$.

(f) Sans calcul. La question précédente combinée à la dernière question de la Partie 1 donne bien

$$P(X_k=1)=\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad P(X_k=2)=P(X_k=3)=\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

(g) Comme $|-1/3|<1$, on a $\left(\frac{1}{3}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et ainsi

$$P(X_k=1) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

$$P(X_k=2) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

$$P(X_k=3) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

ou encore (X_k) converge en loi vers la variable aléatoire X dont la loi est portée l'état stable Π et ce qui démontre la conjecture émise ci-avant.

(h) C'est un calcul de moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}
E(X_k) &= P(X_k=1)+2P(X_k=2)+3P(X_k=3)\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)+\frac{5}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)\\
&= \frac{7}{4}-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k.
\end{aligned}$$

Exercice 2

Cet exercice provient du sujet **ECRICOME 2022**.

Pour tout réel $x>0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie 1 - Étude de la fonction g

(1) Par algèbre des limites,

$$\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

puis par composition avec l'exponentielle, on a donc

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$$

De même,

$$\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et il suit que

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty.$$

(2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h(x) = \ln(x)+2x-1.$$

(a) La fonction h est somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle-même dérivable et, pour tout $x>0$, on a

$$h'(x) = \frac{1}{x}+2>0$$

ce qui permet d'affirmer que h est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) La fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de bijection, elle réalise donc une bijection de R_+^* sur $]\lim_{x\to 0} h(x); \lim_{x\to +\infty} h(x)[=\mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent par h, noté α sur $\mathbb{R}_+*$.

Comme de plus, $h(1)=1>0=h(\alpha)$ et $h(1/2)=\ln(1/2)=-\ln(2)<0$, la stricte croissante de h (et donc de sa bijection réciproque) permet d'affirmer que "les antécédents sont rangés dans le même sens" c'est à dire que

$$\frac{1}{2}<\alpha<1.$$

(c) La fonction g est la composée, par une exponentielle, d'un produit de combinaison de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est encore dérivable sur ce même intervalle. Comme on a

$$\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)' = \frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(2-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x} = \frac{\ln(x)+2x-1}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2},$$

on a bien

$$g'(x) = \left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)' \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \frac{h(x)}{x^2}g(x).$$

(d) La question (2) nous donne le tableau de signes de $h(x)$, ce qui permet d'obtenir facilement celui de $g'(x)$ puis les variations de g.

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

(e) Par définition de l'exponentielle, pour $x>0$,

$$g(x) = \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \exp\left(2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) = x^2\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Or, par croissance comparée, $\ln(x)/x \to 0$ lorsque $x\to+\infty$. On peut donc utiliser le développement limite de $\exp(u)$ en 0 à l'ordre 1 pour écrire

$$\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) = 1 + -\frac{\ln(x)}{x} + o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right), \qquad x\to+\infty.$$

Ceci donne ensuite

$$g(x) = x^2\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = x^2 - x\ln(x) + o(x\ln(x)), \qquad x\to+\infty$$

ou encore

$$g(x) - x^2 = -x\ln(x) + o(x\ln(x))$$

ce qui est équivalent à écrire

$$g(x) - x^2 \sim -x\ln(x), \qquad x\to+\infty.$$

Partie 2 - Étude d'une suite récurrence

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0>0$ et la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = g(u_n).$$

(3) Comme demandé, on procède par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n=0$, u_0 est donné et par hypothèse est strictement positif.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain entier $n\in\mathbb{N}$, u_n existe et soit strictement positif. En particulier u_n est dans le domaine de définition de g et $u_{n+1}=g(u_n)$ est bien défini. De plus,

$$u_{n+1} = \exp\left(\left(2-\frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) > 0$$

(une exponentielle est toujours strictement positive), ce qui termine cette récurrence facile.

(4) C'est un programme classique qui utilise une boucle `for`.

```
def suite(u0, n):
    U=[u0]
    for k in range(n):
        U.append(np.exp((2-1/U[k])*np.log(U[k]))
    return U
```

(5) (a) On reproduit directement le tableau de signe répondant à cette question triviale. Notant $A(x) = (x-1)\ln(x)$ on a

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$A(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

En particulier, pour tout $x > 0$, on a $(x-1)\ln(x) \geq 0$.

(b) Soit $x > 0$. On peut écrire

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}{\exp(\ln(x))} = \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x) - \ln(x)\right) = \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right).$$

Or, $(x-1)\ln(x)/x \geq 0$ pour $x > 0$. Par composition avec l'exponentielle croissante, on a bien que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{g(x)}{x} \geq 1.$$

(c) La question précédente donne bien que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) \geq x$. L'égalité n'est vérifiée que lorsque $g(x)/x = 1$ c'est à dire lorsque

$$\frac{(x-1)\ln(x)}{x} = 0 \iff x = 1.$$

(d) La question précédente, appliquée avec $x = u_n > 0$ permet de voir que

$$u_{n+1} = g(u_n) \geq u_n$$

et donc que la suite (u_n) est toujours croissante.

(6) **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

(a) On procède par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse donnée par le texte.
- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $1/2 \leq u_n \leq 1$. Attention, g n'est pas croissante sur tout l'intervalle (seulement entre α et 1 !). On fait une disjonction de cas.
  - Si $\alpha \leq u_n \leq 1$, alors, par croissance de g sur cet intervalle, on a

$$u_{n+1} = g(u_n) \leq g(1) = 1$$

– Si $1/2 \leq u_n < \alpha$, alors par décroissance de g,

$$u_{n+1} = g(u_n) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Dans les deux cas, on a bien $u_{n+1} \leq 1$. Comme de plus (u_n) est croissante, on a $u_{n+1} \geq u_n \geq 1/2$ dans tous les cas. La récurrence est terminée.

☞ On aurait aussi pu commencer par montrer la stabilité de l'intervalle $[1/2; 1]$ par g ce qui rendait la récurrence triviale.

(b) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1). Par le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite ℓ élément de $[1/2; 1]$. En passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et par continuité de g sur $[1/2; 1]$ (et donc en ℓ), on déduit que ℓ vérifie la relation $\ell = g(\ell)$ ce qui impose d'après une question précédente que $\ell = 1$. Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

(7) **Dans cette question uniquement,** on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Une récurrence immédiate avec la croissance de la suite permet de voir que $u_{n+1} \geq u_n > 1$ et l'hérédité est triviale. On s'en contente (c'est long).

(b) Si la suite (u_n) était majorée, elle convergerait par le théorème de convergence monotone vers une limite ℓ qui vérifierait $\ell \geq u_0 > 1$ et (par le même argument de passage à la limite et de continuité que précédemment) $\ell = g(\ell)$. Or la seule solution possible est $\ell = 1$ et c'est contradictoire avec $\ell > 1$ donc la suite (u_n) n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

(8) **Dans cette question uniquement,** on suppose que $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.

Dans ce cas, on voit (par stricte décroissance de g) que $u_1 = g(u_0) > g(1/2) = 1$. Et donc tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à 1 à partir du deuxième... On applique le résultat de la question précédente, la suite diverge vers $+\infty$.

Partie 3 - Extrema de la fonction f

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note

$$f(x, y) = x^{y - \frac{1}{x}} = \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right).$$

(11) On découpe la fonction.
- La fonction $(x, y) \mapsto x$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonction $t \mapsto 1/t$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classes $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonctions usuelles).

☞ Par composition, les deux fonctions $(x, y) \mapsto \ln(x)$ et $(x, y) \mapsto 1/x$ sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- La fonction $(x, y) \mapsto y$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

☞ Par somme, la fonction $(x, y) \mapsto y - 1/x$ est encore de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
☞ Par produit, la fonction $(x, y) \mapsto \left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)$ est encore de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- La fonction $t \mapsto e^t$ est une fonction usuelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

☞ Par composition la fonction f est bien e classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

(12) Par formules de dérivations,

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= \partial_1\left(\left(y-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) f(x,y) \\
&= \left(\frac{1}{x^2}\ln(x)+\left(y-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right) f(x,y) \\
&= \frac{\ln(x)+xy-1}{x^2} f(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2 f(x,y) &= \partial_2\left(\left(y-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) f(x,y) \\
&= \ln(x) f(x,y)
\end{aligned}$$

(13) Une exponentielle n'étant jamais nulle

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ point critique de } f &\iff \begin{cases} \partial_1 f(x,y) &= 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \dfrac{\ln(x)+xy-1}{x^2} &= 0 \\ \ln(x) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y-1 &= 0 \\ x &= 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, f admet un unique point critique, noté a, de coordonnées $(1,1)$.

(14) On dérive à nouveau... C'est assez lourd...Sauf qu'on va quand même ensuite évaluer en $(1,1)$ et on sait que $\partial_1 f(1,1) = \partial_2 f(1,1) = 0$ ce qui permet d'alléger un peu la présentation des calculs et résultats.

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1} f(x,y) &= \frac{(1/x+y)\times x^2 - 2x(\ln(x)+xy-1)}{x^4} f(x,y) + \partial_1 f(x,y) \\
&= \frac{x+x^2y-2x(\ln(x)+xy-1)}{x^4} f(x,y) + \partial_1 f(x,y)
\end{aligned}$$

$$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \ln(x)\partial_2 f(x,y) = \ln(x)^2 f(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,2} f(x,y) &= \frac{f(x,y)}{x} + \ln(x)\partial_1 f(x,y) \\
&= \partial_{2,1} f(x,y)
\end{aligned}$$

On remplace x et y par 1. Comme $f(1,1) = 1$, on trouve

$$\partial^2_{1,1} f(1,1) = 2, \qquad \partial^2_{1,2} f(1,1) = \partial^2_{2,1} f(1,1) = 1, \qquad \partial^2_{2,2} f(1,1) = 0$$

et on a bien

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(15) Pour déterminer la nature au point critique, il faut connaître le signe des valeurs propres de la hessienne. On note H la matrice hessienne obtenue à la question précédente.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } H &\iff H-\lambda I \text{ non inversible} \\
&\iff \det(H-\lambda I) = 0 \\
&\iff -\lambda(2-\lambda) - 1 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \\
&\iff \lambda = 1+\sqrt{2} \text{ ou } \lambda = 1-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Les deux valeurs propres de la hessienne au point critique sont de signe opposé donc f présente un point col : ce n'est pas un extremum. On ne résiste pas à l'envie d'illustrer ce résultat avec une figure, ci-après.

(16) Le domaine $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un ouvert. Si f admet un extremum global sur celui-ci, c'est nécessairement en un point critique. Or, en l'unique point critique, f présente un point col. Il n'y a donc pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

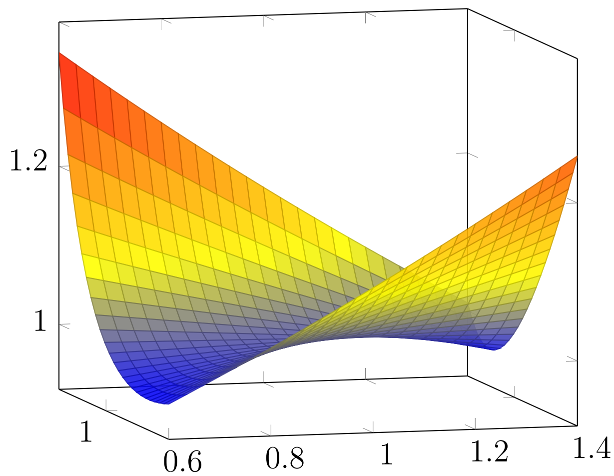


Figure 1. Point col de la fonction f.

Exercice 3

Cet exercice provient du sujet **EML 2019**.
Une solution est disponible ici (Exercice 1, pages 1-3).