Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°2 - Math 1 - sujet B

Mercredi 8 Mars
Solution

Exercice 1

On considère la suite (u_k) définie, pour $k \geq 2$ par $u_k = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

(1) Comme $k-1 \leq k$, on a $u_k \geq 0$. De plus, par télescopage

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

et la suite (u_k) peut être considérée comme une distribution de probabilité. On note alors Y une variable aléatoire telle que $Y(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ et $P(Y = k) = u_k$.

(2) D'après le cours

$$\begin{array}{rcl} Y \text{ admet une espérance} & \Longleftrightarrow & \sum kP(Y=k) \text{ converge (absolument)} \\ & = & \sum k u_k \text{ converge} \end{array}$$

Or, pour tout $k \geq 2$,

$$k u_k = k \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{k}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} \sim \frac{1}{k}, \ k \to +\infty$$

et naturellement, on sait que la série harmonique $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge.
Ainsi, Y n'admet pas d'espérance.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n et on effectue des tirages successifs, avec remise, dans cette urne.
On introduit la variable aléatoire X_n qui prend la valeur du rang du tirage pour lequel, pour la première fois, la boule piochée a un numéro supérieur ou égal à celle piochée lors du tout premier tirage.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note T_k la variable aléatoire qui correspond au numéro de la boule piochée au $k-$ième tirage.

(3) Les tirages se produisent tous dans les mêmes conditions. La boule est piochée dans une urne qui en contient n indiscernables, on reconnait donc une loi uniforme

$$T_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]).$$

La commande Python pour simuler chaque T_k est `rd.randint(1, n+1)`.

(4) On peut piocher une boule avec un numéro supérieur ou égal à la première dès le deuxième tirage, mais comme on pioche avec remise, on peut attendre arbitrairement longtemps pour que cela ait lieu. Ainsi, $X(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$.

(5) (a) Pour simuler X_n il faut d'abord simuler un premier tirage auquel on comparera les autres tirages et on continuera à piocher tant que les tirages suivant renvoient une valeur strictement inférieure. Ceci donne le programme suivant.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n) :
    t = rd.randint(1, n+1)
    k = 2
    while rd.randint(1, n+1) < t :
        k=k+1
    return k
```

(b) La fonction mystère renvoie une liste qui contient les fréquences d'obtention de chacune des valeurs obtenues lors de 1000 simulations de X_n.
La figure représente alors le diagramme à bâtons dont les hauteurs sont les fréquences précédentes ainsi que, représentées par des $\times$, les valeurs de la suite (u_k) c'est à dire les valeurs *théoriques* de la loi de Y. On observe que plus n est grand, plus les hauteurs des bâtons viennent épouser la position des $\times$, ce qui suggère une convergence en loi de X_n vers Y.

(6) (a) Soient $k \geq 2$ et $1 \leq i \leq k$. L'évènement $[X_n = k] \cap [T_1 = i]$ est réalisé si et seulement si on pioche la boule i au premier tirages et des boules avec un numéro strictement inférieur lors des tirages successifs jusqu'au $k-$ième, où on pioche une valeur supérieure ou égale à i. Ceci s'écrit donc

$$[X_n = k] \cap [T_1 = i] = [T_1 = i] \cap \left(\bigcap_{j=2}^{k-1} [T_j < i] \right) \cap [T_k \geq i].$$

(b) Les variables T_j étant indépendantes (car on pioche avec remise), on peut alors déduire de la question précédente

$$\begin{aligned} P([X_n = k] \cap [T_1 = i]) &= P(T_1 = i) \times \left(\prod_{j=2}^{k-1} P(T_j < i) \right) \times P(T_k \geq i) \\ &= \frac{1}{n} \times \left(\prod_{j=2}^{k-1} \frac{i-1}{n} \right) \times \frac{n-i+1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{i-1}{n} \right)^{k-2} \left(1 - \frac{i-1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\left(\frac{i-1}{n} \right)^{k-2} - \left(\frac{i-1}{n} \right)^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[T_1 = i] : \ i \in [\![1;n]\!]\}$, on a

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \sum_{i=1}^{n} P([X_n = k] \cap [T_1 = i]) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2} - \left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(7) (a) Commençons par observer que comme $k = k - 1 + 1$,

$$\begin{aligned} kP(X_n = k) &= \frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2} - \left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(k\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2} - k\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((k-1)\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2} - k\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2} \end{aligned}$$

Observons ensuite que

$$\sum_{k=2}^{N}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2} = \sum_{k=0}^{N-2}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2} = \frac{n}{n-i+1}\left(1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^{N-1}\right).$$

On passe alors à la somme pour k allant de 2 à N et on permute l'ordre de sommation (ce sont des sommes finies avec des indices indépendants, cette permutation est totalement licite). Ceci fait apparaître un télescopage et une somme géométrique de raison $(i-1)/n$ et donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{N} kP(X_n = k) &= \sum_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((k-1)\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2} - k\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{N}\left((k-1)\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2} - k\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{N}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2} \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(1 - N\left(\frac{i-1}{n}\right)^{N-1}\right) + \frac{n}{n-i+1}\left(1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^{N-1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \left(N + \frac{n}{n-i+1}\right)\left(\frac{i-1}{n}\right)^{N-1} + \frac{n}{n-i+1}\right), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule demandée. Ouf!

(b) On sait que X_n admet une espérance si et seulement si la somme partielle calculée ci-dessus admet une limite finie lorsque $N \to +\infty$. Et c'est là que c'est pas mal car n est fixé et c'est N qui tend vers $+\infty$. Comme

$$\lim_{N+\to+\infty}\left(N + \frac{n}{n-i+1}\right)\left(\frac{i-1}{n}\right)^{N-1} = 0$$

car $\left|\dfrac{i-1}{n}\right| < 1$.

Tous les termes de la somme (finie!) admettent une limite lorsque $N \to +\infty$. En permutant limite et somme, on peut donc conclure que X_n admet une espérance et

$$E(X_n) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\left(N+\frac{n}{n-i+1}\right)\left(\frac{i-1}{n}\right)^{N-1}+\frac{n}{n-i+1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{n}{n-i+1}\right)$$

Or, avec un changement d'indice $j = n+1-i$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{n}{n-i+1}\right) &= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-i+1} \\ &= 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\end{aligned}$$

et on a bien

$$E(X_n) = 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

(8) On se laisse guider par l'indication. En posant

$$f\ x \in [0;1] \longmapsto x^{k-2} - x^{k-1},$$

on a que, pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$ fixé,

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-2}-\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^{k-2}-x^{k-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{k-1}}{k-1}-\frac{x^k}{k}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k} \\ &= P(Y=k)\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien la convergence en loi de (X_n) vers Y conjecturée précédemment grâce à l'affichage Python.

Exercice 2

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de même loi $\mathcal{U}(\{-1;1\})$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter) et on pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ X_2(\omega) & X_1(\omega)\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

(1) Soit $\omega \in \Omega$. La matrice $M(\omega)$ est symétrique donc diagonalisable. De plus, comme $X_2(\omega) = X_1(\omega)$ ou bien $X_2(\omega) = -X_1(\omega)$, les deux colonnes de $M(\omega)$ sont liées. La matrice n'est pas inversible.

(2) Soit $\omega \in \Omega$. On observe que

$$M(\omega)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (X_1(\omega)+X_2(\omega))\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est non nul, $X_1(\omega)+X_2(\omega)$ est valeur propre de $M(\omega)$. De même, avec un autre vecteur non nul

$$M(\omega)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = (X_1(\omega)-X_2(\omega))\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

et $X_1(\omega)-X_2(\omega)$ est aussi valeur propre. Observons que ces deux nombres sont différents (si on avait $X_1(\omega)+X_2(\omega) = X_1(\omega)-X_2(\omega)$ alors $X_2(\omega)=0$ ce qui n'est pas possible car $X_2(\Omega)=\{-1,1\}$). Une matrice 2×2 admet au plus deux valeurs propres donc on est certain qu'on les a toutes, et on peut conclure que

$$\mathrm{Sp}(M(\omega)) = \{X_1(\omega)+X_2(\omega);\ X_1(\omega)-X_2(\omega)\}.$$

(3) D'après ce qui précède et par principe de concaténation de familles libres de vecteurs propres, la famille

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

forme une famille libre et donc une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (car elle a le bon cardinal). Par formule de changement de base, on a donc

$$P^{-1}M(\omega)P = D(\omega)$$

où

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres de $M(\omega)$ susmentionnée et

$$D(\omega) = \begin{pmatrix}X_1(\omega)+X_2(\omega) & 0\\ 0 & X_1(\omega)-X_2(\omega)\end{pmatrix}.$$

Observons que la matrice P est indépendante de ω et fonctionne donc pour tout $\omega\in\Omega$.

(4) On considère le système différentiel linéaire à coefficients *aléatoires*

$$(\mathcal{S})\qquad \left\{\begin{array}{rcl} y_1' &=& X_1y_1+X_2y_2\\ y_2' &=& X_2y_1+X_1y_1\end{array}\right.$$

Remarquons que pour tout $\omega\in\Omega$, on obtient un système différentiel linéaire à coefficients constants. On pose, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $Y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}$. On admet que $Y'(t)=\begin{pmatrix}y_1'(t)\\y_2'(t)\end{pmatrix}$.

(a) Il n'y a pas grand chose à faire. Soit $\omega\in\Omega$.

$$\begin{aligned} Y \text{ solution de } (\mathcal{S}) &\iff \left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) &=& X_1(\omega)y_1(t)+X_2(\omega)y_2(t)\\ y_2'(t) &=& X_2(\omega)y_1(t)+X_1(\omega)y_1(t)\end{array}\right.\\ &\iff Y'(t)=M(\omega)Y(t)\end{aligned}$$

(b) Soit $\omega\in\Omega$ fixé.

(i) Les états d'équilibre du système sont les solutions constantes du système différentiel. Ce sont les éléments du noyau de $M(\omega)$.
On résout (en observant que $X_1(\omega)^2 - X_2(\omega)^2 = 0$)

$$\begin{aligned}
Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ état d'équilibre du système } &\iff Y \in \mathrm{Ker}(M(\omega)) \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} X_1(\omega)a + X_2(\omega)b &=& 0 \\ X_2(\omega)a + X_1(\omega)b &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff b = -\frac{X_2(\omega)}{X_1(\omega)}a
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(M(\omega)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{X_2(\omega)}{X_1(\omega)} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ -X_2(\omega) \end{pmatrix}\right).$$

(ii) On connait le spectre de $M(\omega)$ et les vecteurs propres associés à chaque valeur propre; D'après le cours, toute solution Y est de la forme

$$Y(t) = \alpha e^{X_1(\omega)+X_2(\omega)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{X_1(\omega)-X_2(\omega)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{X_1(\omega)+X_2(\omega)} + \beta e^{X_1(\omega)-X_2(\omega)} \\ \alpha e^{X_1(\omega)+X_2(\omega)} - \beta e^{X_1(\omega)-X_2(\omega)} \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(c) Toutes les trajectoires sont convergentes si et seulement si $\mathrm{Sp}(M(\omega)) \subset \mathbb{R}_-$. Or

$$X_1(\omega) \pm X_2(\omega) \in \{-2, 0, 2\}$$

et on a , par indépendance de X_1 et X_2

$$\begin{aligned}
P\left(\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_-\right) &= P\left(X_1 \pm X_2 \in \{-2, 0\}\right) \\
&= P\left(([X_1 = 1] \cap [X_2 = -1]) \cup ([X_1 = -1] \cap [X_2 = 1]) \cup ([X_1 = -1] \cap [X_2 = -1])\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la on trouve une probabilité de 1/4 que toutes les trajectoires soient convergentes. (Et on converge alors dans ce cas vers un état d'équilibre).

Exercice 3

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 99**.

Pour tout réel $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; -\frac{1}{2}\right\}$, on considère la fonction f_a, définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_a(x, y) = \left(1 + y + xy + ax^2\right) e^y.$$

(1) La fonction $(x, y) \mapsto 1 + y + xy + ax^2$ est polynomiale et donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La fonction coordonnée $(x, y) \mapsto y$ l'est également, et par composition avec la fonction exponentielle (de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$), la fonction $(x, y) \mapsto e^y$ est aussi $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, par produit, f_a est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (a) On applique les formules de dérivation.

$$\begin{aligned}\partial_1 f_a(x,y) &= (y+2ax)e^y\\[1em] \partial_2 f_a(x,y) &= (1+x)e^y + (1+y+xy+ax^2)e^y\\ &= (2+x+y+xy+ax^2)e^y\end{aligned}$$

(b) Par définition

$$\begin{aligned}(x,y)\text{ point critique de } f_a &\iff \begin{cases}\partial_1 f_a(x,y) = 0\\ \partial_2 f_a(x,y) = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} y+2ax = 0\\ 2+x+y+xy+ax^2 = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} y = -2ax\\ 2+x-2ax-2ax^2+ax^2 = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} y = -2ax\\ 2+(1-2a)x-ax^2 = 0\end{cases}\end{aligned}$$

Afin de résoudre l'équation $2+(1-2a)x-ax^2=0$, on calcule le discriminant du polynôme du second degré en présence, $\Delta = (1-2a)^2+8a = (1+2a)^2$. Ainsi, on a deux solutions pour x

$$x = \frac{-(1-2a)+(1+2a)}{-2a} = -2, \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{-(1-2a)-(1+2a)}{-2a} = \frac{1}{a}.$$

Au final,

$$(x,y)\text{ point critique de } f_a \iff \begin{cases} x = -2\\ y = 4a\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1/a\\ y = -2\end{cases}$$

et f_a possède deux points critiques dont les coordonnées sont

$$\left(\frac{1}{a},-2\right), \quad \text{et} \quad (-2,4a).$$

(3) On dérive à nouveau. Observons que, comme f_a est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Schwarz assure l'égalité des dérivées partielles *croisées* d'ordre 2, *i.e.*, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\partial^2_{1,2} f_a(x,y) = \partial^2_{2,1} f_a(x,y)$. Les formules de dérivation donnent

$$\begin{aligned}\partial_1^2 f_a(x,y) &= 2ae^y\\[1em] \partial^2_{1,2} f_a(x,y) &= \partial^2_{2,1} f_a(x,y)\\ &= (1+y+2ax)e^y\\[1em] \partial_2^2 f_a(x,y) &= (1+x+2+x+y+xy+ax^2)e^y\\ &= (3+2x+y+xy+ax^2)e^y\end{aligned}$$

(4) Si λ_1 et λ_2 sont les racines d'un trinôme de la forme x^2-sx+p alors, par factorisation par $(x-\lambda_i)$ - $i=1,2$ - le coefficient de degré 2 étant égal à 1, on a, pour tout x réel

$$x^2-sx+p = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2.$$

Par identification, on a bien

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 = s\\ \lambda_1\lambda_2 = p\end{cases}$$

(5) (a) On forme la matrice en chacun des deux points critiques. On a d'après les calculs des dérivées partielles d'ordre 2

$$\nabla^2 f_a(-2,4a) = e^{4a}\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = e^{4a}H_1.$$

Le signe des valeurs propres de $\nabla^2 f_a(-2,4a)$ (qui permet de conclure à la présence d'un éventuel extremum en $(-2,4a)$ est le même que celui de celles de la matrice H_1. Notant λ_1 et λ_2 les valeurs propres de H_1, celles-ci sont solutions de l'équation

$$\begin{aligned} \det(H_1 - xI) = 0 &\iff (2a-x)(-1-x) - 1 = 0 \\ &\iff x^2 - (2a-1)x + (-1-2a) = 0. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, les valeurs propres de H_1 vérifient donc les équations du système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 2a-1 \\ \lambda_1\lambda_2 &= -(1+2a) \end{cases}$$

Afin de présenter un extremum en $(-2,4a)$, les valeurs propres doivent être non nulles et de même signe ou encore leur produit doit être strictement positif. Or

$$\lambda_1\lambda_2 > 0 \iff 1 + 2a < 0 \iff a < -\frac{1}{2}.$$

Dans ce cas, on a donc un extremum. Le signe de la somme des deux valeurs propres donne ensuite le signe des deux valeurs propres (car elles sont de même signe et non nulles). Mais, si $a < -(1/2)$, alors $2a - 1 < 0$ et celles-ci sont donc toutes deux négatives et f_a présente alors un maximum local en $(-2,4a)$.

On fait la même chose pour le second point critique, à commencer par la hessienne

$$\nabla^2 f_a\left(\frac{1}{a},-2\right) = e^{-2}\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{a} \end{pmatrix} = e^{-2}H_2.$$

Les valeurs propres μ_1 et μ_2 de H_2 vérifient

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 &= \dfrac{2a^2+a+1}{a} \\ \mu_1\mu_2 &= 2a+1 \end{cases}$$

Il y aura donc un extremum si et seulement si $2a+1 > 0$ ou encore $a > -1/2$. Dans ce cas, c'est le signe de $\mu_1 + \mu_2$ qui en précise la nature. Celui-ci étant déterminé par le signe de a (car le numérateur est toujours strictement positif à cause de son discriminant strictement négatif), on aura donc un maximum local si $a \in]-1/2;0[$ et un minimum local si $a \in]0,+\infty[$.

(b) La question précédente nous permet de faire le bilan et de distinguer en effet 3 cas:

- Si $a < -\frac{1}{2}$, f_a présente un maximum local en $(-2,4a)$, celui-ci vaut
$$f_a(-2,4a) = e^{4a}.$$
- Si $-\frac{1}{2} < a < 0$, f_a présente aussi un maximum local, mais cette fois en $(1/a,-2)$, celui-ci vaut
$$f_a\left(\frac{1}{a},-2\right) = -\left(\frac{1}{a}+1\right)e^{-2}$$
- Si $a > 0$, f_a présente au point précédent un minimum local, qui vaut encore
$$f_a\left(\frac{1}{a},-2\right) = -\left(\frac{1}{a}+1\right)e^{-2}.$$

Problème

Ce problème est inspiré par un sujet **ESSEC 2007**.

Partie 1 - Sommes de loi exponentielles indépendantes

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$, on considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} \mathrm{d}t$.

(1) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Observons que

$$t^n e^{-\lambda t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right),\ t \to +\infty$$

par croissance comparée (et car $\lambda > 0$). Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente, il en est de même (par comparaison par négligeabilité d'intégrales de fonctions positives) de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} \mathrm{d}t$.

Comme $t \mapsto t^n e^{-\lambda t}$ est continue sur $[0;1]$, l'intégrale sur ce même intervalle est parfaitement définie. Au final, I_n est bien une intégrale convergente.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $A > 0$ et

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & e^{-\lambda t} \\ v(t) & = & t^{n+1} \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \\ v(t) & = & (n+1)t^n \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;A]$. On peut fonc effectuer une intégration par parties pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^A t^{n+1} e^{-\lambda t} \mathrm{d}t &= \left[-\frac{t^{n+1} e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^A + \frac{n+1}{\lambda} \int_0^A t^n e^{-\lambda t} \\ &= -\frac{A^{n+1} e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{n+1}{\lambda} \int_0^A t^n e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées

$$-\frac{A^{n+1} e^{-\lambda A}}{\lambda} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et par la question précédente,

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-\lambda t} \mathrm{d}t \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} I_{n+1}, \quad \int_0^A t^n e^{-\lambda t} \mathrm{d}t \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} I_n$$

On a donc bien

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{\lambda} I_n.$$

(c) On montre alors, par une récurrence trèèèès facile que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

- <u>intialisation.</u> Pour $n = 0$, on a

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} = \frac{0!}{\lambda^{0+1}}$$

car $\lambda e^{-\lambda t}$ (pour $t \geq 0$) est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ, il suffit d'ajuster avec le paramètre pour retrouver une fonction dont l'intégrale fait 1.

- hérédité. Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait $I_n = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$. Alors

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{n+1}{\lambda} I_n \\ &= \frac{n+1}{\lambda} \times \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, on considère la fonction

$$g_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

(2) Il suffit de vérifier que les trois conditions du cours sont satisfaites pour g_n.

- g_n est nulle ou produit de quantités positives (si $t \geq 0$) donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a bien $g_n(t) \geq 0$.

- Sur $\mathbb{R}_-^*$, g_n est constante donc continue. Sur $\mathbb{R}_+$, g_n est produit de fonctions usuelles (polynomiale, exponentielle) continues donc elle-même continue. En fait, on voit que g_n est même continue en 0 ce dont on a pas besoin. Mais quand même.

- D'après la question précédente, comme g_n est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, l'intégrale de g_n sur $]-\infty; +\infty[$ se ramène à celle sur $[0; +\infty[$ et on reconnait les intégrales I_{n-1} compensées par leur valeur. On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{I_{n-1}} I_{n-1} = 1$$

et g_n peut bien être considérée comme une densité de probabilité.
Pour $n = 1$ on retrouve la loi exponentielle de paramètre 1.

On considère $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on pose $S_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$.

(3) Par linéarité de l'espérance et comme les variables aléatoires Y_i ont toutes la même espérance (égale à $1/\lambda$), on a

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \frac{1}{\lambda}.$$

Comme les variables Y_i sont indépendantes, on peut aussi calculer la variance de leur somme

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Dans toute la suite, on **admet** que S_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction g_n.

Partie 2 - Loi de Pareto

Soient a et b des réels strictement positifs. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Pareto de paramètres a et b si X admet pour densité la fonction

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < b \\ a\dfrac{b^a}{t^{a+1}}, & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

(4) C'est reparti pour un tour...

- Comme a et b sont des réels strictement positifs, il est immédiat que $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- La fonction $t \mapsto t^{a+1}$ est continue sur $[b, +\infty[$ et ne s'annule pas. Son inverse est alors continue et une fonction constante est continue donc f est continue partout sauf éventuellement en b.
- Comme f est nulle sur $]-\infty, b[$ il suffit de montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ vers 1. Soit alors $A > b$.

$$\begin{aligned} \int_b^A f(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{b^a}{t^a}\right]_b^A \\ &= 1 - \frac{b^a}{A^a} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

et f est bien une densité de probabilité.

(5) (a) D'après le cours

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_b^{+\infty} \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t \text{ converge} \\ &\iff a > 1 \qquad\qquad (\text{ Par critère de Riemann}) \end{aligned}$$

Auquel cas,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_b^{+\infty} \frac{ab^a}{t^a}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{ab^a}{(a-1)t^{a-1}}\right]_b^A \\ &= \frac{ab}{a-1} \end{aligned}$$

(b) L'existence de la variance est caractérisée par celle du moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned} X \text{ admet une variance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\mathrm{d}t \text{ converge (absolument)} \\ &\iff \int_b^{+\infty} \frac{1}{t^{a-1}}\mathrm{d}t \text{ converge} \\ &\iff a > 2 \qquad\qquad (\text{ Par critère de Riemann}) \end{aligned}$$

Auquel cas,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_b^{+\infty} \frac{ab^a}{t^{a-1}}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{ab^a}{(a-2)t^{a-2}}\right]_b^A \\ &= \frac{ab^2}{a-2} \end{aligned}$$

Puis, par König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{ab^2}{a-2} - \frac{a^2b^2}{(a-1)^2} = \frac{b^2(a(a-1)^2 - a^2(a-2))}{(a-2)(a-1)^2} = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}.$$

(6) On sait que $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$.

Comme f est nulle sur $]-\infty; b[$ on distingue deux cas. Dans le deuxième cas, on a déjà fait le calcul de l'intégrale.

- Si $x < b$, alors $F_X(x) = 0$.
- Si $x \geq b$, alors $F_X(x) = \displaystyle\int_b^x f(t)\mathrm{d}t = 1 - \frac{b^a}{x^a}$.

Au final,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < b \\ 1 - \dfrac{b^a}{x^a}, & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

(7) On pose alors $Y = \ln\left(\dfrac{X}{b}\right)$.

(a) Commençons par observer que comme $X(\Omega) = [b, +\infty[$, X/b est à valeurs dans $[1, +\infty[$ et $Y(\Omega) \subset [0; +\infty[$. Donc, si $x < 0$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$. Soit donc $x \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P\left(\ln\left(\frac{X}{b}\right) \leq x\right) \\ &= P\left(X \leq be^x\right) \end{aligned}$$

Or, $be^x \geq b \iff x \geq 0$, donc

$$F_Y(x) = F_X(be^x) = 1 - \frac{ab^a}{(be^x)^a} = 1 - ae^{-ax}$$

On a reconnu la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre a. Ainsi

$$Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a).$$

(b) C'est une simulation classique par inversion. On applique la formule *inverse* de celle qui permet de passer de X à Y sur la commande qui permet de simuler la loi exponentielle de paramètre a. Comme

$$Y = \ln\left(\frac{X}{b}\right) \iff X = b\exp(Y),$$

cela donne le programme suivant. Attention pour simuler $\mathcal{E}(a)$, il faut utiliser la commande `rd.exponential(1/a)`.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

```

```python
def simul_X(a,b):
    y=rd.exponentiel(1/a)
    return b*np.exp(y)
```

Partie 3 - Estimation des paramètres d'une loi de Pareto

On considère dans cette partie une loi de Pareto de paramètres a et b dont seule la valeur de b est connue. On dispose d'un $n-$échantillon $(X_1, ..., X_n)$ (avec $n \geq 2$) de X, et on note f_a une densité de X. On va estimer la valeur de a par la méthode du maximum de vraisemblance. Soient $x_1, ...x_n$ des réels strictement supérieurs à b. On introduit la fonction L définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$L(a) = \prod_{i=1}^n f_a(x_i).$$

(8) Par définition de la fonction L et de f_a, comme tous les x_i sont supérieurs à b,

$$\begin{aligned} L(a) &= \prod_{i=1}^n f_a(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{ab^a}{x_i^{a+1}} \\ &= \frac{a^n b^{na}}{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{a+1}} \end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} \ln(L(a)) &= n\ln(a) + an\ln(b) - (a+1)\sum_{i=1}^n \ln(x_i) \\ &= \varphi(a) \end{aligned}$$

(9) On considère (sans surprise) la fonction φ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall a > 0, \qquad \varphi(a) = n\ln(a) + na\ln(b) - (a+1)\sum_{i=1}^n \ln(x_i).$$

(a) Il s'agit d'étudier les variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Celle-ci est combinaison de fonctions usuelles dérivables sur son intervalle de définition. On a alors, pour $a > 0$,

$$\begin{aligned} \varphi'(a) &= \frac{n}{a} + n\ln(b) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \\ &= \frac{n + \left(n\ln(b) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right)a}{a}. \end{aligned}$$

Comme $x_i \geq b$, $\sum \ln(x_i) \geq n\ln(b)$ et, en posant

$$w = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i) - n\ln(b)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - \ln(b))} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i/b)},$$

on a tableau de variations suivant :

a	0		w		$+\infty$
$\varphi'(a)$	‖	$+$	0	$-$	
φ	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(w)$	$\searrow$	$-\infty$

et φ atteint bien son unique maximum en w.

(b) Par croissante de la fonction exponentielle, on a

$$(\forall a > 0, \quad \varphi(a) \le \varphi(w)) \Longrightarrow (\forall a > 0, \quad L(a) = \exp(\varphi(a)) \le \exp(\varphi(w)) = L(w))$$

et L atteint encore son unique maximum en w.

(10) On pose dorénavant $W_n = \dfrac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{b}\right)}$.

(a) D'après la Question (7b), $\ln\left(\frac{X_i}{b}\right) \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$. Or d'après la Partie 1 et d'après le lemme des coalitions, les variables $\ln\left(\frac{X_i}{b}\right)$ sont mutuellement indépendantes. En posant $\lambda = a$ et avec le résultat admis en fin de Partie 1, on peut affirmer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{b}\right)$ admet pour densité la fonction g_n.

(b) En notant $Z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{b}\right)$, on constate que $W_n = \dfrac{n}{Z_n}$. On peut alors calculer son espérance avec la densité g_n de Z_n et le théorème de transfert. En effet, sous réserve de convergence

$$E(W_n) = \int_0^{+\infty} \frac{n}{t} g_n(t)\mathrm{d}t = \frac{na}{n-1} \int_0^{+\infty} g_{n-1}\mathrm{d}t = \frac{na}{n-1}$$

car g_{n-1} est encore une densité de probabilité. On a bien le résultat voulu. Un estimateur non biaisé de a s'obtient alors facilement avec la linéarité de l'espérance en posant

$$W_n' = \frac{n-1}{n} W_n.$$