Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°1

À rendre le 21/09

Exercice 1

On considère trois suites $(un), (v_n)$ et (w_n) définies par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & 1 \\ w_0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n - 2v_n + w_n \end{array}\right.$$

(1) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suites(n) :` qui renvoie le triplet (u_n, v_n, w_n).

On introduit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, c'est à dire que si un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ dans la base canonique, alors $f(u)$ a pour coordonnées AX dans la base canonique.

(2) (a) Calculer $A^2 - 6A$. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que A n'est pas inversible.
(b) (*) Déterminer le spectre de A. La matrice est-elle diagonalisable?
(c) Déterminer une base (u_1, u_2) de $\text{Ker}(f)$.
(d) On pose $u_3 = e_1 + 2e_2 - e_3$. Calculer $f(u_3)$ et exprimer le résultat en fonction de u_3.
(e) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) On note P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_1, u_2 et u_3 dans la base $\mathcal{B}$ (dans cet ordre). Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} à l'aide d'un pivot de Gauss simultané.

(4) (a) Justifier (*) ou vérifier par le calcul que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale que l'on explicitera.
(b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

(c) Expliciter la matrice A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(5) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Quelle est la valeur de X_0?

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n X_0$.

(c) Donner les expressions des termes généraux des trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 2

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

(1) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ? Rappeler la valeur de leurs espérances.

On définit la variable aléatoire X de sorte que que $X = i$ si les i premières boules tirées sont blanches et la $(i+1)-$ème est verte, ou si les i premières boules tirées sont vertes et la $(i+1)-$ème est blanche.

(2) (Simulation sous Python)

(a) Recopier et compléter le programme suivant qui permet de simuler la variable X

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(p) :
    x=1
    if rd.rand( ) <= p:
        boule_old=1
    else:
        boule_old=0
    if rd.rand( ) > p:
        boule_new=...
    else:
        boule_new=...
    while boule_old == boule_new:
        x= ...
        boule_old= ...
        if ... :
            boule_new= ...
        else :
            boule_new= ...
    return x
```

(b) Proposer un programme alternatif permettant de simuler la variable aléatoire X, plus court, faisant intervenir la commande `rd.binomial()`.

(3) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

(4) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

(5) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

Exercice 3

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t.$$

(1) Prouver que G est une fonction impaire.
(2) Déterminer le signe de G sur $\mathbb{R}$.
(3) Montrer que

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad G(x) \geq \frac{x^3}{3}.$$

(4) En déduire la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?
(5) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner, pour tout réel x, une expression de sa dérivée $G'(x)$.
(6) Déterminer le développement limité de G à l'ordre 2 en 0.
(7) Construire le tableau de variations de G sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi que la valeur en 0.
(8) Étudier la convexité de G.
(9) Donner l'allure de la courbe représentative de G en précisant la tangente en 0.

(10) (**Attention difficile) On veut trouver des relations de négligeabilités sur $G(x)$ en $+\infty$. Soit $x > 1$.

(a) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, on a $e^u \geq 1 + u + u^2$.

(b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties astucieuse, qu'il existe une constante $\kappa \geq 0$ telle que

$$G(x) = \kappa + \frac{e^{x^2}}{2x} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} \mathrm{d}t.$$

(c) (i) Déduire de la question précédente que, pour tout $x \geq 1$, $G(x) \geq \dfrac{e^{x^2}}{2x}$.

(ii) En déduire alors que, pour tout $\alpha > 1$, on a $\dfrac{e^{x^2}}{x^\alpha} = o(G(x)), \quad x \to +\infty$.

(d) (i) Montrer que la fonction $t \mapsto e^{t^2}/t$ est croissante sur $[1; +\infty[$.
(ii) En déduire que

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} \mathrm{d}t \leq \frac{e^{x^2}}{2x} \ln(x).$$

(iii) Montrer alors que, pour tout $\alpha < 1$, on a $G(x) = o\left(\dfrac{e^{x^2}}{x^\alpha}\right), \quad x \to +\infty$.