Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°1

Solution

Exercice 1

On considère trois suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ v_0 &= 1 \\ w_0 &= 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ w_{n+1} &= -u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$$

(1) Il est indispensable dans ce type de programme (comme pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2) d'introduire des *variables auxiliaires* de sorte à ne pas perdre des informations dont on a encore besoin pour d'autres calculs.

```
def suites(n):
    u=1
    v=1
    w=0 # initialisation
    for k in range(n):
        x=u+2*v-w
        y=2*u+4*v-2*w
        z=-u-2*v+w
        u=x
        v=y
        w=z
    return [u, v, w]
```

On introduit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

(2) (a) Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -6 \\ 12 & 24 & -12 \\ -6 & -12 & 6 \end{pmatrix} = 6A$$

et il suit immédiatement que $A^2 - 6A = 0$. Supposons alors que A soit inversible. Il existe alors une matrice A^{-1} telle que $A^{-1}A = I$. Mais alors,

$$0 = A^{-1} \cdot 0 = A^{-1}\left(A^2 - 6A\right) = A - 6I$$

ou encore $A = 6I$ ce qui n'est pas vrai du tout! Ainsi, on peut conclure que A n'est pas inversible.

(b) (*) La relation $A^2 - 6A = 0$ nous donne un polynôme annulateur de A qui est $X^2 - 6X$ et qui a pour racines 0 et 6. On sait déjà que 0 est valeur propre (car A n'est pas inversible). On peut donc conclure que

$$\{0\} \subset \mathrm{Sp}(A) \subset \{0; 6\}.$$

Reste à vérifier que 6 est bien valeur propre. Or,

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 6I) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} -5x + 2y - z &=& 0 \\ 2x - 2y - 2z &=& 0 \\ -x - 2y - 5z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} -x - 2y - 5z &=& 0 \\ 12y + 24z &=& 0 \\ -6y - 12z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& -2z \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc 6 est bien valeur propre et $E_6 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On connait alors le spectre de A mais celui-ci étant composé de seulement deux valeurs, on a besoin de connaitre la dimension de chaque sous-espace propre si on veut savoir que A est diagonalisable ou non. Il faut donc déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(A))$. Comme A est clairement de rang 1 (les trois colonnes sont colinéaires à la première), son noyau est de dimension 2 (par le théorème du rang) et comme E_6 est de dimension 1 on a

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda) = \dim(E_0) + \dim(E_6) = 2 + 1 = 3$$

et A est bien diagonalisable.

(c) On résout. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(u) = 0 \Longleftrightarrow AX = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - z &=& 0 \\ 2x + 4y - 2z &=& 0 \\ -x - 2y + z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad x = -2y + z \\
&\Longleftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $u_1 = (-2, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$, on a

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$$

ce qui veut dire que la famille (u_1, u_2) engendre $\mathrm{Ker}(f)$. Comme de plus ces ceux vecteurs forment clairement une famille libre (ils sont deux et ne sont pas colinéaires), la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(d) On applique A au vecteur coordonnées de u_3.

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\12\\-6\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

ainsi $f(u_3) = 6u_3$.

(e) Comme la famille (u_1, u_2, u_3) est composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont la dimension est 3, il suffit que montrer que la famille est libre pour qu'elle en forme une base. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2a + b + c &=& 0\\ a + 2c &=& 0\\ b - c &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2a + b + c &=& 0\\ b + 5c &=& 0\\ b - c &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2a - 4c &=& 0\\ b + 5c &=& 0\\ 4c &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff a = b = c = 0
\end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est bien libre et forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) La matrice P considérée est la matrice

$$P = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Les colonnes de P forment une base de $\mathbb{R}^3$: elle est donc inversible (on a déjà résolu à la question précédente l'équation de noyau). Inversons P par pivot de Gauss simultané.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & 0 & -4 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-6 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2\\ 0 & 6 & 0 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)$$

Ainsi, on obtient

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

(4) (a) Avec le cours de réduction (*), on peut dire que P est la matrice de passage de la base canonique vers la base (u_1, u_2, u_3) de vecteurs propres (respectivement associés à 0,0 et 6) de f. La formule de changement de base donne donc

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Si on a pas ce résultat, on fait le calcul. Si on doit avoir $A = PDP^{-1}$ alors

$$\begin{aligned}
D = P^{-1}AP &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

qui est bien une matrice diagonale comme attendu.

(b) La petite récurrence à savoir faire.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a bien

$$A^0 = I = PP^{-1} = PIP^{-1} = PD^0P^{-1}.$$

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A \cdot A^n \\
&= PDP^{-1} \cdot PD^nP^{-1} \qquad (\mathbf{HR}) \\
&= PDD^nP^{-1} \\
&= PD^{n+1}P^{-1},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(c) La matrice D est diagonale, calculer ses puissances est immédiat :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$$

Il suit que, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6^n & 2\times 6^n & -6^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6^n & 2\times 6^n & -6^n \\ 2\times 6^n & 4\times 6^n & -2\times 6^n \\ -6^n & -2\times 6^n & 6^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(5) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

(a) On observe que

$$AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + 2v_n - w_n \\ 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ -u_n - 2v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Naturellement, on a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) C'est une récurrence trèèèèèèèèèès facile. Qu'on fait quand même.
- initialisation. Pour $n = 0$, $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$ et c'est vérifié.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_n = A^n X_0$. Alors

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= A \cdot A^n X_0 \qquad \text{(HR)} \\ &= A^{n+1} X_0, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(c) D'après tout ce qui précède, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6^n & 2 \times 6^n & -6^n \\ 2 \times 6^n & 4 \times 6^n & -2 \times 6^n \\ -6^n & -2 \times 6^n & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \times 6^n \\ 6 \times 6^n \\ -3 \times 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on obtient que, pour $n \geq 1$,

$$u_n = 3 \times 6^{n-1}, \quad v_n = 6^n, \quad w_n = -3 \times 6^{n-1}.$$

Exercice 2

Cet exercice provient d'une annale **EML 1998**.

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

(1) N_V est le rang du premier V dans une suite de tirages indépendants avec $\mathrm{P}(V) = p$ (équiprobabilité des boules) à chaque tirage. Donc $N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et de même $N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)$. D'après le cours, on a donc

$$E(N_V) = \frac{1}{p}, \qquad E(N_B) = \frac{1}{1-p}.$$

On définit la variable aléatoire X de sorte que que $X = i$ si les i premières boules tirées sont blanches et la $(i+1)-$ème est verte, ou si les i premières boules tirées sont vertes et la $(i+1)-$ème est blanche.

(2) (Simulation sous Python)

(a) On tire une boule verte avec probabilité p. Donc l'obtention d'une boule verte est simulé sous Python par le fait que le nombre aléatoire renvoyé par `np.rand()` soit inférieur à p. Si celui-ci est supérieur à p, on interprète alors le résultat comme obtention d'une boule blanche. En regardant le programme propose, on comprend qu'il y a deux variables qui stockent une valeur numérique correspondant à boule blanche ou boule verte et on compare les deux boules. Tant que ce sont les mêmes, la variable `x` qui compte les lancers augmente de 1.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(p) :
    x=1
    if rd.rand( ) <= p: #si on tire une verte
        boule_old=1 # verte est représenté par 1
    else:
        boule_old=0 # blanche par 0
    if rd.rand( ) > p: # si on tire une blanche
        boule_new= 0
    else:
        boule_new= 1
   while boule_old == boule_new: # tant que même couleur
       x=x+1
       boule_old=boule_new # avant derniere devient dernière
       if rd.rand( ) > p: # si on tire une blanche
           boule_new= 0
       else:
           boule_new= 1
   return x
```

(b) Finalement on peut introduire des variables de Bernoulli de paramètre p qui prennent la valeur 1 (ou 0) selon que la boule tirée est verte (ou blanche). Ceci permet de raccourcir le programme un tout petit peu.

```
def simul_X(p) :
    x=1
    boule_old = rd.binomial(1, p)
    boule_new = rd.binomial(1, p)
    while boule_old == boule_new :
       x=x+1
       boule_old=boule_new
       boule_new = rd.binomial(1, p)
   return x
```

(3) Commençons par observer que $X\left(\Omega\right)=\mathbb{N}^*$. En effet, La valeur minimale que peut prendre X est 1 si jamais les deux premières boules ne sont pas de la même couleur. Ensuite, on peut avoir une première série de boules de même couleur *abitrairement* longue et donc toutes les valeurs $k\in\mathbb{N}^*$ sont possible. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a $(X=k)$ si et seulement si on a k verte puis une blanche (ce qui équivaut à $N_B=k+1$) ou inversement (c'est à dire $N_V=k+1$). Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X=k\right) &= \mathrm{P}\left(\left(N_V=k+1\right)\cup\left(N_B=k+1\right)\right)\\ &= \mathrm{P}\left(N_V=k+1\right)+\mathrm{P}\left(N_B=k+1\right)\\ &= \left(1-p\right)^k p+p^k\left(1-p\right).\end{aligned}$$

(4) Comme les valeurs prises par la variable aléatoire X sont positives, celle-ci admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X=k)$ est convergente. Or

$$kP(X=k)=k\left(\left(1-p\right)^k p+p^k\left(1-p\right)\right)=p(1-p)k(1-p)^{k-1}+p(1-p)kp^{k-1},$$

et on reconnait une combinaison de deux termes généraux de séries géométriques dérivées (de raison p et $(1-p)$) convergentes. Donc notre série converge et X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left((1-p)^k p + p^k (1-p)\right) \\ &= p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} + p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} \\ &= p(1-p) \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} + p(1-p) \times \frac{1}{(1-p))^2} \\ &= \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}, \end{aligned}$$

ce qui était attendue.

(5) Considérons alors la fonction f définie sur $]0;1[$ par

$$f(p) = E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

Cette fonction est combinaison de quotients de polynomes dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur $]0;1[$ donc elle est dérivable et

$$f'(p) = \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}$$

ce qui permet de dresser le tableau de variations de f

p	0		$1/2$		1
$f'(p)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$

On peut alors conclure que $E(X)$ est minimale lorsque $p = 1/2$ (et elle vaut alors 2); c'est quand on a les mêmes proportion de vertes et de blanches que l'on a en moyenne, les listes monocolore les plus courtes.

Exercice 3

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t.$$

☞ On commence par remarquer que la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle du type $[0;x]$ (ou $[x;0]$) ce qui assure la bonne définition de l'intégrale et de la fonction G.

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Cette question est classique et il faut savoir la traiter. Il faut utiliser un changement de variable $u = -t$. Plus précisément,

$$G(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} \mathrm{d}t.$$

Si on veut faire apparaître $G(x)$, il faut transformer la borne $-x$ en x (il ne suffira donc pas de naïvement intervertir les bornes). On pose donc

$$u = u(t) = -t$$

qui est un changement de variables affine donc licite. On a alors $\mathrm{d}u = u'(t)\mathrm{d}t = -\mathrm{d}t$ et la formule permet d'écrire

$$\begin{aligned} G(-x) &= \int_0^{-x} e^{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{x} e^{(-u)^2}(-\mathrm{d}u) \\ &= -\int_0^{x} e^{u^2}\mathrm{d}u \\ &= -G(x) \end{aligned}$$

et G est bien impaire.

(2) G étant impaire, il suffit de connaitre de signe de $G(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ pour déduire celui sur $\mathbb{R}_-$. Soit donc $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ étant positive sur $[0; x]$ (et les bornes de l'intégrale étant rangées dans le sens croissant), la positivité de l'intégrale assure que

$$G(x) = \int_0^{x} e^{t^2}\mathrm{d}t \geq 0.$$

Observons que $G(0) = 0$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$G(x)$		$-$	0	$+$	

(3) Soit $x \geq 0$. On sait que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$e^a \geq 1 + a \geq a$$

C'est en effet une inégalité classique dont un argument peut être la convexité: la fonction exponentielle étant convexe (dérivée seconde strictement positive), la courbe se trouve au dessus de toutes ses tangentes, en particulier celle en 0 d'équation $y = 1 + t$, ce qui donne le résultat. On applique cette inégalité avec $a = t^2$. On obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad e^{t^2} \geq t^2.$$

C'est en particulier vrai sur $[0; x]$ et par positivité de l'intégrale, on obtient alors

$$G(x) = \int_0^{x} e^{t^2}\mathrm{d}t \geq \int_0^{x} t^2\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3},$$

et on a bien l'inégalité demandée.

(4) Comme $x^3/3 \to +\infty, x \to +\infty$, le principe de comparaison et l'inégalité précédente donnent immédiatement

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty.$$

Comme G est impaire, on en déduit, par symétrie centrale,

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = -\infty.$$

(5) Comme la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est **continue** sur $\mathbb{R}$, un résultat du cours (qui s'appelle *le théorème fondamental de l'analyse*) permet d'affirmer que G est **LA** primitive de $t \mapsto e^{t^2}$ qui s'annule en 0. À ce titre, elle est dérivable, et même de classe $\mathcal{C}^1$ (car sa dérivée est continue comme mentionné plus haut) sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = e^{x^2}.$$

(6) La fonction G' étant clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (c'est la composée de deux fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$), on peut donc affirmer que G est finalement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et la formule de Taylor-Young permet d'obtenir son DL à l'ordre 2 en 0:

$$G(x) = G(0) + G'(0)x + \frac{G''(0)}{2}x^2 + o(x^2), \qquad x \to 0.$$

Mais $G(0) = 0$, $G'(0) = 1$ et $G''(0) = 0$. On obtient donc

$$G(x) = x + o(x^2), \qquad x \to 0.$$

(7) La dérivée de G étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction y est strictement croissante. On connait déjà les limites et on peut donc sans difficulté dresser le tableau de variations.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$G'(x)$		$+$	
G	$-\infty$	0	$+\infty$

(8) La fonction G étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, sa convexité est caractérisée par le signe de sa dérivée seconde. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

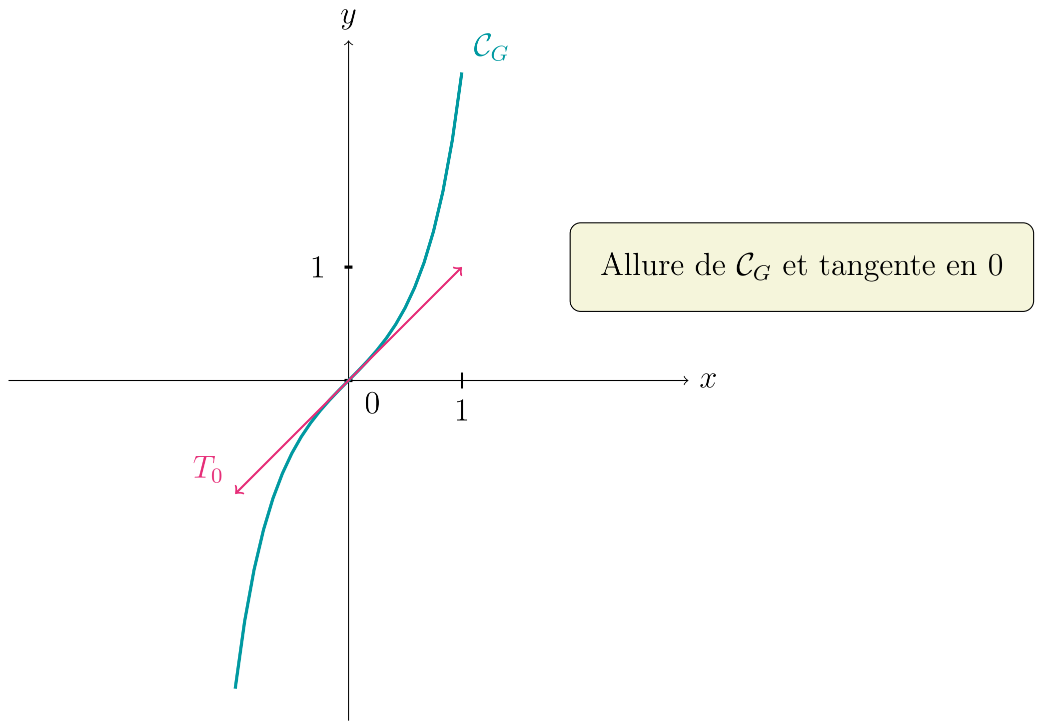
$$G''(x) = (G')'(x) = 2xe^{x^2},$$

quantité dont le signe s'obtient très facilement.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$G''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, G est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$. La dérivée seconde s'annule **en changeant de signe** en 0. La courbe de G présente donc un point d'inflexion en $x = 0$. Ce point a pour coordonnées $(0, 0)$. Le changement d'inflexion est notamment marqué par un changement de position relative par rapport à la tangente en 0.

(9) La tangente en 0 a pour équation $y = x$ d'après le DL qui précède.



(10) (**Attention difficile) On veut trouver un équivalent de $G(x)$ en $+\infty$. Soit $x > 1$.

(a) En considérant la fonction $h : \ u \mapsto e^u - 1 - u - u^2/2$, on a $h'(u) = e^u - (1+u) \geq 0$ (argument de convexité) et donc h est croissante sur $[0;1]$. Or, $h(0) = 0$ donc $h(u) \geq h(0) = 0$ et on a l'inégalité demandée.

(b) Il n'est pas possible de trouver une primitive qui s'exprime à l'aide de fonctions usuelles de la fonction $t \mapsto e^{t^2}$. En revanche, on peut le faire avec la fonction $t \mapsto t \times e^{t^2}$. Il s'agit donc de faire apparaître ce t en remarquant que $1 = t \times (1/t)$ mais pour que l'intégrale ne pose pas de problème il faut que t soit "loin" de 0. On va donc commencer par découper l'intégrale en 2, avec Chasles et procéder à l'IPP.

$$G(x) = \int_0^1 e^{t^2}\mathrm{d}t + \int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{t^2}\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t}te^{t^2}\mathrm{d}t$$

Posons alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & te^{t^2} \\ v(t) & = & 1/t \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & e^{t^2}/2 \\ v'(t) & = & -1/t^2 \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;x]$, on peut intégrer par parties, ce qui donne

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^1 e^{t^2}\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t}te^{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 e^{t^2}\mathrm{d}t + \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 e^{t^2}\mathrm{d}t + \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \\ &= \kappa + \frac{e^{x^2}}{2x} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

où on a posé

$$\kappa = \int_0^1 e^{t^2}\mathrm{d}t - \frac{e}{2},$$

qui est bien une constante. Reste à montrer qu'elle est positive! Comme on a montré $e^u \geq 1 + u + u^2/2$, on a, pour tout $t \in [0;1]$,

$$e^{t^2} \geq 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$

et il suit, par positivité de l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{t^2}\mathrm{d}t &\geq \int_0^1 \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10}\right]_0^1 \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{43}{30} > \frac{42}{30} = \frac{14}{10} = 1,4 > \frac{e}{2}
\end{aligned}$$

et donc $\kappa > 0$.

(c) (i) La constante κ étant positive et l'intégrale aussi (ce qui est dessous est positif), on a clairement

$$G(x) \geq \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

(ii) Comme G est différente de 0 si $x > 0$ (c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0;x]$ positive et non identiquement nulle), on a

$$0 \leq \frac{1}{G(x)} \leq \frac{2x}{e^{x^2}}.$$

Soit $\alpha > 1$. On a donc

$$0 \leq \frac{\frac{e^{x^2}}{x^\alpha}}{G(x)} \leq \frac{2}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car $\alpha - 1 > 0$. Ainsi, on a bien $\dfrac{e^{x^2}}{x^\alpha} = o(G(x)), \quad x \to +\infty.$

(d) (i) La fonction $\varphi : \ t \mapsto e^{t^2}/t$ est bien dérivable sur $[1, +\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On a, pour tout $t \geq 1$,

$$\varphi'(t) = \frac{(2t^2 - 1)e^{t^2}}{t^2} > 0$$

donc la fonction est bien strictement croissante sur $[1, +\infty[$ (et *a fortiori* sur $[1, x]$).

(ii) Par croissante de la fonction φ ci-dessus, on a, pour tout $t \in [1;x]$,

$$\frac{e^{t^2}}{t} \leq \frac{e^{x^2}}{x}$$

ce qui donne donc, par multiplication par $1/(2t) > 0$ puis par croissance de l'intégrale

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{e^{x^2}}{2x}\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{e^{x^2}}{2x}\ln(x).$$

(iii) D'après tout ce qui précède, on peut alors écrire que

$$G(x) \leq \kappa + \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{2x}\ln(x).$$

Soit alors $\alpha < 1$, on a

$$0 \leq \frac{G(x)}{\frac{e^{x^2}}{x^\alpha}} \leq \kappa\frac{x^\alpha}{e^{x^2}} + \frac{x^{\alpha-1}}{2} + \frac{x^{\alpha-1}}{2}\ln(x).$$

Or, $\alpha - 1 < 0$. Il suit que (par croissance comparée pour la deuxième limite)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{2}\ln(x) = 0.$$

Par encadrement, le quotient ci-dessus tend bien vers 0 en $+\infty$ et on peut alors écrire que

$$G(x) = o\left(\frac{e^{x^2}}{x^\alpha}\right), \qquad x \to +\infty.$$

☞ **Remarque.** On pourrait en fait montrer que

$$G(x) \sim \frac{e^{x^2}}{2x}, \qquad x \to +\infty$$

mais il faut un peu plus de travail. On ne résiste pas à l'envie de montrer comment il faut faire. Il faut effectuer une nouvelle intégration par parties sur l'intégrale pour obtenir (on omet le détail, on fait confiance au lecteur ou à la lectrice pour procéder de la même façon que précédemment)

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t = \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\mathrm{d}t = \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^2 \frac{e^{t^2}}{t^4}\mathrm{d}t + \frac{3}{4}\int_2^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\mathrm{d}t.$$

Maintenant, la fonction $t \mapsto e^{t^2}/t^4$ est encore croissante sur ... $[\sqrt{2}; x]$ donc sur $[2, +\infty[$ et on peut donc la majorer par sa valeur en x et donc majorer la dernière intégrale par la valeur de cette fonction en x multipliée par sa longueur (qui vaut $x - 2 \leq x$). On obtient

$$\int_2^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\mathrm{d}t \leq (x-2)\frac{e^{x^2}}{x^4} \leq \frac{e^{x^2}}{x^3}$$

Comme $\displaystyle\frac{3}{4}\int_1^2 \frac{e^{t^2}}{t^4}\mathrm{d}t = \kappa_2$ est une constante, on a donc donc

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{e^{x^2}}{x^3} - \frac{e}{4} + \kappa_2.$$

Cette quantité est clairement (par encadrement) négligeable devant e^{x^2}/x ce qui permet d'écrire que

$$G(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} + o\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)$$

et on a bien l'équivalent annoncé.