Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°2

À rendre le 07/10

Exercice 1. Mise en jambes facile.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) Déterminer un équivalent, puis donner la limite, lorsque $x \to +\infty$ des quantités

$$(i)\ \sqrt{4x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right), \qquad (ii)\ \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)-\exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

(2) Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en fournir une base

$$(i)\ \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-t &=& 0\\ y &=& t\end{array}\right. .\right\},$$

$$(ii)\ E_2=\left\{\begin{pmatrix} a+b & 0\\ a+b & 2a+2b\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}\right\} \qquad (iii)\ E_3=\{P\in\mathbb{R}_2[X]\ P(1)=P(2)\}.$$

(3)
   (a) Déterminer les réels $a\in\mathbb{R}$ pour lesquels la famille $\{(2a,a-1);(a+3,a+1)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $(a,a+1)$ dans cette base.

Exercice 2. Matrices anti-symétriques

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dites *antisymétriques*, c'est à dire que

$$\mathcal{A}_n=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}):\ {}^tM=-M\},$$

où ${}^tM$ désigne la transposée de M. On rappelle à ce propos que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB, \qquad \text{et} \qquad {}^t(AB)={}^tB\,{}^tA.$$

(1) Montrer que $\mathcal{A}_n$ est un espace vectoriel.
(2) Monter que, pour toute matrice $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et toute matrice $M\in\mathcal{A}_n$, on a ${}^tBMB\in\mathcal{A}_n$.
(3) Dans le cas $n=3$, déterminer une base, puis la dimension, de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
(4) Soit $M\in\mathcal{A}_3$. Montrer qu'il existe un réel α à préciser, qui dépend des coordonnées de M dans la base explicitée ci-avant, tel que $M^3=\alpha M$. En déduire, par l'absurde, que M n'est pas inversible.

Exercice 3. Olive et Tom

Olive et Tom s'affrontent aux tirs au but (en *mort subite*) et se lancent dans une succession de tirs, chacun leur tour - en commençant par Olive. Tom est un peu meilleur qu'Olive; il marque trois fois sur cinq alors que son ami ne marque qu'une fois sur trois.

On introduit la variable aléatoire X qui prend la valeur 0 si Tom marque le premier but ou k si c'est Olive qui marque le premier but et si ce premier but a lieu lors de la $k-$ième tentative d'Olive.

Illustration

(1) **Simulation sous Python**

(a) Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui renvoie une simulation de X.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X():
    x=1
    while rd.rand() > 1/3:
        if ............
            return ..........
        x= .........
    return x
```

(b) Écrire un script qui simule 1000 fois la variable X et permette d'obtenir la fréquence des confrontations où Olive gagne le duel. Conjecturer quant à la valeur de la probabilité que ce soit Olive qui gagne.

(2) Loi de X.

(a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = k)$.
(b) En déduire $P(X = 0)$.
(c) Quelle est la probabilité que Olive gagne?
(d) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 4* - Autour de la convexité

On rappelle qu'une fonction f est dite **convexe** sur un intervalle I si pour tous $x_1, x_2 \in I$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in [0;1]$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Une fonction g est dite concave (sur I) si $-g$ est convexe (sur I).

(1) On veut montrer l'équivalence entre les assertions suivantes:

Convexité : une équivalence

- f est convexe sur I
- Pour tout entier $n \geq 2$, pour tous $x_1, ..., x_n \in I$, pour tous $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0;1]$ tels que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$, on a
$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

(a) Montrer que la condition suffisante est vraie.

(b) On va montrer la condition nécessaire par **récurrence** sur $n \geq 2$. On suppose donc que f est convexe.

(i) Montrer que la propriété est vrai pour $n = 2$.

(ii) On suppose que la propriété est vraie pour un certain $n \geq 2$. On considère alors un $(n+1)-$uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ de $[0;1]$ vérifiant $\lambda_1 + ... + \lambda_{n+1} = 1$ et un $(n+1)-$uplet $(x_1, ..., x_{n+1})$ d'éléments de I. En introduisant les coefficients

$$\mu_j = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

montrer que

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

(c) **Application 1:** Moyenne géométrique vs. moyenne arithmétique.
Montrer que si $x_1, .., x_n$ sont des réels strictement positifs alors

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

(d) **Application 2:** Inégalité de Jensen.
On considère une variable aléatoire X à valeurs finies telle que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\} \subset I$ et, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(X = x_k) = p_k$. Montrer que, pour toute fonction φ convexe sur I, on a

$$\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X)).$$

(2) Soient p et q sont deux entiers tels que $1 \leq p \leq q$.

(a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq x^p \leq x^q + 1$.

(b) En déduire que si X est une variable aléatoire (à valeurs positives) admettant un moment d'ordre q, alors X admet un moment d'ordre p et

$$E(X^p) \leq 1 + E(X^q).$$

(c) On suppose que X est une variable aléatoire finie. Elle admet donc un moment d'ordre p et un moment d'ordre q. À l'aide de l'inégalité de Jensen avec une fonction convexe bien choisie appliquée à la variable X^p, montrer que

$$E(X^p) \leq E(X^q)^{\frac{p}{q}}.$$

Quelle autre démonstration plus immédiate aurait-on pu donner pour le cas $p = 1$ et $q = 2$?