Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°2

Solution

Exercice 1. Mise en jambes facile.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) Commençons par observer que

$$\sqrt{4x+1} = \sqrt{4x}\sqrt{1+1/4x} \sim 2\sqrt{x}, \quad x \to +\infty$$

car $\sqrt{1+1/4x} \to 1$.
De plus, on a

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0, \quad x \to +\infty$$

Donc, en utilisant que $\ln(1-u) \sim -u, u \to 0$, on obtient

$$\sqrt{4x+1}\ln\left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \sim 2\sqrt{x} \times \left(-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \sim -2\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = -2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -2.$$

Pour l'autre, on utilise le développement limite de e^u en 0, à savoir $e^u = 1 + u + o(u)$. On commence naïvement avec le DL d'ordre 1. On a donc, sachant que $1/x^2 \to 0, x \to +\infty$ et $1/(x+1)^2 \to 0$ aussi,

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) &= 1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 - \frac{1}{(x+1)^2} - o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \\
&= \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Malheureusement

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} \sim \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3},$$

ce qui n'est pas compatible avec l'ordre d'*erreur* du petit o. Il faut donc utiliser le DL à l'ordre 2 de l'exponentielle pour conclure, à savoir $e^u = 1 + u + u^2/2 + o(u^2)$. On obtient dans ce cas

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) &= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - 1 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2(x+1)^4} - o\left(\frac{1}{(x+1)^4}\right) \\
&= \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} + \frac{(x+1)^4 - x^4}{2x^4(x+1)^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{(x+1)^4 - x^4}{2x^4(x+1)^4} = \frac{4x^3+6x^2+4x+1}{2x^4(x+1)^4} = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On obtient bien,

$$\exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

donc

$$\exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \sim \frac{2}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(2) On voit que

$$\begin{aligned} u=(x,y,z,t)\in E_1 &\iff \begin{cases} 2x+y-t &= 0 \\ y &= t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= t \end{cases} \\ &\iff u=(0,y,z,y)=y(0,1,0,1)+z(0,0,1,0). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_1 = \mathrm{Vect}((0,1,0,1);(0,0,1,0))$$

et c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donc un espace vectoriel. De plus, la famille composée des deux vecteurs ci-dessus (qui engendrent E_1) est alors génératrice. Les deux vecteurs n'étant clairement pas colinéaires, ils forment une famille libre et finalement une base de E_1 (et on a $\dim E_1 = 2$).

On procède de la même manière pour E_2.

$$M = \in E_2 \iff M = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a+b & 2a+2b \end{pmatrix} = (a+b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a tout de suite

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

Il suit que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel. De plus, il est engendré par un unique vecteur explicité ci-dessus (non nul) qui en forme donc une base (en particulier $\dim E_2 = 1$).

$$\begin{aligned} P(X)=aX^2+bX+c\in E_3 &\iff P(1)=P(2) \\ &\iff a+b+c=4a+2b+c \\ &\iff 3a+b=0 \\ &\iff P(X)=aX^2-3aX+c=a(X^2-3X)+c \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_3 = \mathrm{Vect}(X^2-3X, 1)$$

et E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ donc un espace vectoriel. La famille $(X^2-3X, 1)$ est génératrice de E_3 et comme ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires, c'est aussi une famille libre et donc une base de E_3. (On peut donc en conclure que $\dim E_3 = 2$).

(3)

(a) Cette question nécessite une rédaction rigoureuse. Pour que deux vecteurs (non nuls) de $\mathbb{R}^2$ forment une base, il suffit qu'ils forment une famille libre. Ainsi, on cherche $a\in\mathbb{R}$ tel que

$$\lambda(2a, a-1) + \mu(a+3, a+1) = (0,0) \iff \lambda=\mu=0.$$

Ainsi, a est un paramètre et les inconnues du système (à paramètre) sont λ et μ. On a

$$\lambda(2a,a-1)+\mu(a+3,a+1)=(0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a\lambda+(a+3)\mu & = & 0 \\ (a-1)\lambda+(a+1)\mu & = & 0 \end{array}\right.$$

Afin de pouvoir commencer à faire un pivot de Gauss, il faut s'assurer que le premier pivot que l'on utilise est non nul et donc traiter un premier cas quand celui-ci vaut 0.

- **Premier cas**: Si $a=0$.

  Le système devient

  $$\left\{\begin{array}{rcl} 2a\lambda+(a+3)\mu & = & 0 \\ (a-1)\lambda+(a+1)\mu & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3\mu & = & 0 \\ -\lambda+\mu & = & 0 \end{array}\right. \iff \lambda=\mu=0$$

  Ainsi, pour $a=0$, la famille des deux vecteurs considérée est bien une base de $\mathbb{R}^2$.

- Si $a\neq 0$.

  On peut faire $(L2)\leftarrow 2a(L_2)-(a-1)(L_1)$. Le système devient

  $$\left\{\begin{array}{rcl} 2a\lambda+(a+3)\mu & = & 0 \\ (a-1)\lambda+(a+1)\mu & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a\lambda+(a+3)\mu & = & 0 \\ (a^2+3)\mu & = & 0 \end{array}\right. \iff \mu=\lambda=0$$

  car, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $a^2+3\neq 0$. Ainsi, dans ce cas également la famille forme une base de $\mathbb{R}^2$.

En conclusion, pour tout $a\in\mathbb{R}$, la famille $((2a,a-1);(a+3,a+1))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) On cherche donc (l'unique) couple (α,β) tel que

$$(a,a+1)=\alpha(2a,a-1)+\beta(a+3,a+1).$$

Il suffit alors de résoudre le système.

$$(a,a+1)=\alpha(2a,a-1)+\beta(a+3,a+1) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a\alpha+(a+3)\beta & = & a \\ (a-1)\alpha+(a+1)\beta & = & a-1 \end{array}\right.$$

Dans le but de résoudre ce système, il faut encore distinguer deux cas (même si on sait qu'il y aura, pour tout $a\in\mathbb{R}$ un unique couple solution).

- Si $a=0$. Dans ce cas, il est clair que

  $$(0,1)=-1(0,-1)+0\cdot(3,1)$$

  et les coordonées de $(0,1)$ sont donc $(-1,0)$ dans la base $((0,-1),(3,1))$.

- Si $a\neq 0$. Comme précédemment,

$$\begin{aligned}
(a,a+1)=\alpha(2a,a-1)+\beta(a+3,a+1) &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a\alpha+(a+3)\beta & = & a \\ (a-1)\alpha+(a+1)\beta & = & a+1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a\alpha+(a+3)\beta & = & a \\ (a^2+3)\beta & = & 2a(a+1)-a(a-1)=a^2+3a \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a\alpha+(a+3)\beta & = & a-(a+3)\frac{a(a+3)}{a^2+3} \\ \beta & = & \frac{a(a+3)}{a^2+3} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{-3(a+1)}{a^2+3} \\ \beta & = & \frac{a(a+3)}{a^2+3} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On vérifie bien que
$$(a, a+1) = \frac{-3(a+1)}{a^2+3}(2a, a-1) + \frac{a(a+3)}{a^2+3}(a+3, a+1).$$
Et d'ailleurs, cette relation reste vraie pour $a = 0$.

Exercice 2. Matrices anti-symétriques

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dites *antisymétriques*, c'est à dire que
$$\mathcal{A}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ {}^tM = -M\},$$
où ${}^tM$ désigne la transposée de M. On rappelle à ce propos que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors
$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \qquad \text{et} \qquad {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA.$$

(1) On montre que $\mathcal{A}_n$ est un espace vectoriel en montrant que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet

- La matrice nulle $0_n \in \mathcal{A}_n$. Sa transposée est encore la matrice nulle l'opposée de celle-ci est encore la matrice nulle. Ainsi, $\mathcal{A}_n$ est non vide.

- Soient M et N deux matrices de $\mathcal{A}_n$ (vérifiant donc ${}^tM = -M$ et ${}^tN = -N$) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. D'après la remarque ci-dessus, on peut écrire
$${}^t(\lambda M + \mu N) = {}^t(\lambda M) + {}^t(\mu N) = \lambda\, {}^tM + \mu\, {}^tN = \lambda(-M) + \mu(-N) = -(\lambda M + \mu N)$$
et $\lambda M + \mu N$ est encore une matrice antisymétrique. Ainsi, $\mathcal{A}_n$ est stable par combinaison linéaire et c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.

(2) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque et $M \in \mathcal{A}_n$. Alors, comme ${}^t({}^tM) = M$ et d'après le rappel de début d'exercice,
$${}^t\left({}^tBMB\right) = {}^tB \cdot {}^tM \cdot {}^t\left({}^tB\right) = {}^tB \cdot (-M) \cdot B = -\left({}^tBMB\right)$$
et donc $({}^tBMB) \in \mathcal{A}_n$, ce qu'on voulait.

(3) Ici $n = 3$, on peut donc écrire explicitement les composantes d'une matrice M de $\mathcal{A}_3$ et résoudre le système correspondant. Plus précisément,

$$\begin{aligned}
M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3 \iff & \ {}^tM = -M \\
\iff & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -a \\ b &=& -d \\ g &=& -c \\ e &=& -e \\ h &=& -f \\ i &=& -i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& -d \\ g &=& -c \\ e &=& 0 \\ h &=& -f \\ i &=& 0 \end{array}\right. \\
\iff & M = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\iff & M = bA_1 + cA_2 + fA_3
\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$\mathcal{A}_3 = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3).$$

Il est alors clair que la famille (A_1, A_2, A_3) est génératrice de $\mathcal{A}_3$. Pour qu'elle en forme une base, il est **nécessaire** de vérifier qu'elle est libre, ce qu'on fait tout de suite

$$xA_1 + yA_2 + zA_3 = 0 \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

ainsi, la famille est libre et forme une base de $\mathcal{A}_3$. Celle-ci étant composée de 3 vecteurs, on peut conclure que

$$\dim(\mathcal{A}_3) = 3.$$

(4) Soit $M \in \mathcal{A}_3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base (A_1, A_2, A_3), ce qui veut dire que

$$M = xA_1 + yA_2 + zA_3 = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$M^2 = \begin{pmatrix} -(x^2+y^2) & -yz & xz \\ -yz & -(x^2+z^2) & -xy \\ xz & -xy & -(y^2+z^2) \end{pmatrix},$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -(x^2+y^2+z^2)x & -(x^2+y^2+z^2)y \\ (x^2+y^2+z^2)x & 0 & -(x^2+y^2+z^2)z \\ (x^2+y^2+z^2)y & (x^2+y^2+z^2)z & 0 \end{pmatrix} = -(x^2+y^2+z^2)M.$$

Ainsi, en posant $\alpha = -(x^2+y^2+z^2)$, on a $M^3 = \alpha M$.

Si M était inversible, on aurait l'existence d'une matrice inverse M^{-1} telle que $M \cdot M^{-1} = I$. Mais alors, en multipliant par M^{-1} on a

$$M^2 = M^{-1} \cdot M^3 = M^{-1} \cdot \alpha M = \alpha I,$$

ce qui n'est possible que si $x = y = z = 0$, mais dans ce cas M est la matrice nulle et n'est pas inversible. Ainsi, on conclut que M n'est pas inversible ou encore qu'aucune matrice anti-symétrique n'est inversible.

Exercice 3. Olive et Tom (ils sont toujours en forme)

Olive et Tom s'affrontent aux tirs au but (en *mort subite*) et se lancent dans une succession de tirs, chacun leur tour - en commençant par Olive. Tom est un peu meilleur qu'Olive; il marque trois fois sur cinq alors que son ami ne marque qu'une fois sur trois.

On introduit la variable aléatoire X qui prend la valeur 0 si Tom marque le premier but ou k si c'est Olive qui marque le premier but et si ce premier but a lieu lors de la $k-$ième tentative d'Olive.

Illustration

©Yōichi Takahashi, Shūeisha

(1) **Simulation sous Python**

(a) Tant que Olive rate son tir (ce qu'on représente par `rd.rand() > 1/3`), on fait tirer Tom. Si Tom marque (ce qu'on représente par `rd.rand() <= 3/5`, Olive perd, la fonction renvoie 0 et s'arrête. Sinon, on continue et Olive tire une fois de plus (`x=x+1`). Le programme est donc le suivant:

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X( ):
    x=1
    while rd.rand( ) > 1/3:
          if  rd.rand( ) <= 3/5 :
              return 0
          x= x+1
    return x
```

(b) Olive gagne si et seulement si $[X > 0]$. On simule 1000 fois la variable X et on *stocke* les simulations dans une liste que l'on note `L` puis on compte combien de ces simulations sont non nulles.

```python
L=[simul_X( ) for k in range(1000)]
c=0
for k in range(1000):
    if L[k] > 0:
        c=c+1
print(c/1000)
```

Le résultat de l'exécution du programme est le suivant

Affichage Python

```
> > >
0.471
```

On peut donc conjecturer que $P(X > 0) \simeq 0.471$.

(2) **Loi de** X.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Introduisons les évènements O_j (resp. T_j) "Olive (resp. Tom) réussit son $j-$ième tir". On a

$$[X = k] = \left(\overline{O}_1 \cap \overline{T}_1\right) \cap \left(\overline{O}_2 \cap \overline{T}_2\right) \cap ... \cap \left(\overline{O}_{k-1} \cap \overline{T}_{k-1}\right) \cap O_k.$$

Par indépendance des tirs de nos deux concurrents,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\overline{O}_1)P(\overline{T}_1)...P(\overline{O}_{jk-1})P(\overline{T}_{k-1})P(O_k) \\ &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{15}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

(b) Par complémentarité,

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 1-\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \\ &= 1-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{15}\right)^{k-1} \\ &= 1-\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{15}\right)^{j} \\ &= 1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-4/15} = 1-\frac{1}{3}\times\frac{15}{11} \\ &= \frac{18}{33} \end{aligned}$$

(c) On constante que $P(\text{"Olive gagne"}) = P(X>0) = 1-P(X=0) = \frac{15}{33} \simeq 0.45$ ce qui est cohérent avec la valeur 0.471 conjecturée en début d'exercice.

(d) Attention, ici, X est une variable aléatoire discrète avec un univers image infini. On commence donc par montrer qu'elle **admet** une espérance.

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \sum_{k\geq 0} kP(X=k) \text{ converge (absolument)} \\ &\iff \sum_{k\geq 1} kP(X=k) \text{ converge} \end{aligned}$$

Or, pour $k \geq 1$,

$$kP(X=k) = \frac{1}{3}k\left(\frac{4}{15}\right)^{k-1}$$

et on reconnait le multiple du terme général d'une série géométrique dérivée, de raison $4/15$ (avec $|4/15| < 1$) donc convergente. Ainsi, X admet une espérance et

$$E(X) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{4}{15}\right)^{k-1} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{(1-4/15)^2} = \frac{1}{3}\times\frac{15^2}{11^2} = \frac{75}{121}.$$

Exercice 4* - Autour de la convexité

On rappelle qu'une fonction f est dite **convexe** sur un intervalle I si pour tous $x_1, x_2 \in I$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in [0;1]$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Une fonction g est dite concave (sur I) si $-g$ est convexe (sur I).

(1) On veut montrer l'équivalence entre les assertions suivantes:

Convexité : une équivalence

- f est convexe sur I
- Pour tout entier $n \geq 2$, pour tous $x_1, ..., x_n \in I$, pour tous $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0;1]$ tels que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$, on a
$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

(a) C'est c'est vrai pour tout $n \geq 2$, c'est en particulier vrai pour $n = 2$, ce qui correspond à la définition de la convexité. Donc le sens $\Leftarrow$ est immédiat.

(b) On va montrer la condition nécessaire par **récurrence** sur $n \geq 2$. On suppose donc que f est convexe.

(i) C'est la définition de fonction convexe.

(ii) On suppose que la propriété est vraie pour un certain $n \geq 2$. On considère alors un $(n+1)-$uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ de $[0;1]$ vérifiant $\lambda_1 + ... + \lambda_{n+1} = 1$ et un $(n+1)-$uplet $(x_1, ..., x_{n+1})$ d'éléments de I. On va utiliser une première fois l'inégalité de convexité que l'on connait (pour deux nombres) puis dans un deuxième temps l'inégalité pour n supposée vraie par (HR).

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&= f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \qquad \text{(inégalité de conv. pour } n=2\text{)} \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \qquad \text{(par HR)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i),
\end{aligned}$$

et la récurrence est terminée.

(c) **Application 1:** Moyenne géométrique vs. moyenne arithmétique.

Pour établir un lien entre produit et somme, on pense au log. On revient à la quantité de départ avec l'exponentielle, qui a le bon goût d'être convexe. Comme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1,$$

tout se goupille parfaitement. Plus précisément,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_i)\right)$$

En appliquant l'inégalité de convexité, on obtient alors

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \exp(\ln(x_i)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

qui est bien l'inégalité demandée.

(d) **Application 2:** Inégalité de Jensen.
On considère une variable aléatoire X à valeurs finies telle que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\} \subset I$ et, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(X = x_k) = p_k$. En particulier, on a

$$\sum_{k=1} np_k = 1.$$

Ainsi, par convexité

$$\varphi(E(X)) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k p_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k \varphi(x_k) = E(\varphi(X)),$$

par le théorème de transfert. C'est bien l'inégalité demandée.

(2) Soient p et q sont deux entiers tels que $1 \leq p \leq q$.

(a) Soient $x \geq 0$ un nombre réel positif et $p, q \in \mathbb{N}^*$ deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq q$.

- Si $0 \leq x < 1$.
  Dans ce cas les puissances de x sont rangées dans l'ordre décroissant... mais elles sont toutes inférieures à 1. Plus précisément, $x^p \leq 1^p = 1$ (par croissante de la fonction $t \mapsto t^p$) et comme $x^p \geq 0$ et $x^q \geq 0$, on a
  $$0 \leq x^p \leq 1 \leq 1 + x^q.$$
- Si $x \geq 1$.
  Dans ce cas, $x^p \leq x^q$. Il suit que
  $$0 \leq x^p \leq x^r \leq x^q + 1.$$

Dans tous les cas, on a l'encadrement voulu.

(b) On considère X une variable aléatoire à valeurs positives admettant un moment d'ordre q. Pour montrer qu'une série converge, on peut travailler sur son terme général. Ici,

$$0 \leq k^p P(X = k) \leq (1 + k^q)P(X = k) = P(X = k) + k^q P(X = k)$$

Or, la série $\sum P(X = k)$ converge (car X est une v.a. et sa somme vaut donc1) et la série $\sum k^q P(X = k)$ converge aussi par hypothèse de l'existence du moment d'ordre r (et sa somme vaut $E(X^q)$). Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on peut alors conclure que la série $\sum k^p P(X = k)$ converge également, de plus l'inégalité ci-dessus donne bien

$$E(X^p) \leq 1 + E(X^q).$$

(c) On suppose que X est une variable aléatoire finie. Elle admet donc un moment d'ordre p et un moment d'ordre q.
Considérons la fonction $\varphi : \ x \mapsto x^{q/p}$. Cette fonction est (bien définie, de classe $\mathcal{C}^2$ et) convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet,

$$\varphi''(x) = \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right) x^{q/p-2} > 0$$

car $q > p$. On applique alors l'inégalité de Jensen avec φ à X^p qui admet bien une espérance. On a

$$E(X^p)^{q/p} = \varphi(E(X^p)) \leq E(\varphi(X^p)) = E(X^q)$$

ou encore

$$E(X^p) \leq E(X^q)^{p/q}.$$

Pour $p = 1$ et $q = 2$, cette inégalité s'écrit

$$E(X)^2 \leq E(X^2).$$

Mais on le savait déjà, en effet :

$$0 \leq E((X - E(X)^2) = V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$