Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°3

À rendre le 26/10 (oui oui)

Exercice 1

Partie I : Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = e_1 - e_2 + e_3$ et $v = e_1 - e_2$.

(1) (a) Montrer que $u \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$.
(b) Vérifier que $(f - \mathrm{id})v = u$.
(c) En déduire que $v \in \operatorname{Ker}\left((f - \mathrm{id})^2\right)$.

(2) (a) Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base $\mathcal{B}$) est nulle, telle que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ soit la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pensera à vérifier que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ une fois le vecteur w déterminé.

(b) Déduire de la question précédente que la matrice A est inversible.
(c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie II : Étude d'un autre endomorphisme

On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3.
On note $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2$, $P_3(x) = x^3$ les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{E}$.
On considère alors l'ensemble $\mathcal{F}$ suivant :

$$\mathcal{F} = \{P \in \mathcal{E} \ : \ P(0) = 0\}.$$

(3) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel et que la famille $\mathcal{H} = (P_3, P_2, P_1)$ est une base de $\mathcal{F}$.

(4) On considère l'application g qui à tout élément P de $\mathcal{F}$ associe la fonction polynomiale Q définie par
$$Q(X) = (3X+1)P(X) - X^2P'(X).$$
 (a) Montrer que g est une application linéaire.

 (b) Soit $P \in \mathcal{F}$. Calculer $g(P)(0)$ et justifier brièvement pourquoi $g(P)$ est de degré inférieur ou égal à 3.
 (c) En déduire que g est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.
 (d) Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{H} = (P_3, P_2, P_1)$.
 (e) $(*)$ En déduire que $\mathrm{Sp}(g) = \{1\}$ puis déterminer le sous espace propre de g associé à la valeur propre 1.
 (f) À l'aide la Question (2c), exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g^n(P_1)$ en fonction de P_1, P_2 et P_3.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

(1) **Étude de** f.

 (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

 (b) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

 (c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^\star$ et justifier que f est finalement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

 (d) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble à déterminer.

 (e) Achever l'étude des variations de f, dresser son tableau de variations, construire sa courbe représentative ainsi que la tangente à cette courbe à l'origine.

(2) **Étude de** $f(x) - x$. Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

 (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;1[$ puis y calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
 (b) Déterminer le signe de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$ sur $[0,1]$. (On donne $f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \simeq 0,82$.)

(3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

 (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite(n):` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.

 (b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0;1[$.

 (c) En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante et qu'elle converge. Déterminer sa limite.

(4) **Une nouvelle fonction et une suite implicite**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h_n(x) = xf\left(\sqrt{\frac{|x|}{n}}\right).$$

(a) Montrer qu'il existe un unique réel positif, que l'on notera α_n, tel que $h_n(\alpha_n) = 1$.

(b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, α_n est strictement supérieur à 1 et que α_n est solution de l'équation

$$(E_n) \qquad x\ln(x) = n.$$

(c) Étudier la fonction φ définie sur $[1, +\infty[$ par $\varphi(x) = x\ln(x)$. En déduire, en utilisant la fonction φ^{-1} dont on justifiera l'existence, que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty.$$

(d) Justifier la relation $\ln(\alpha_n) + \ln(\ln(\alpha_n)) = \ln(n)$, puis montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)} = 1.$$

(e) En déduire que

$$\alpha_n \sim \frac{n}{\ln(n)}$$

Exercice 3

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$.

(1) **Simulation en Python.**

(a) Compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il simule la variable X_n.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n) :
    nB=1
    nN=1
    for k in range(n) :
        if .......... :
            nN=.......
        else :
            ........
    return ........
```

(b) Que fait la fonction `mystere` suivante ? Que peut-on conjecturer quant à l'affichage, présenté ci-contre, correspondant à l'exécution des commandes qui suivent ?

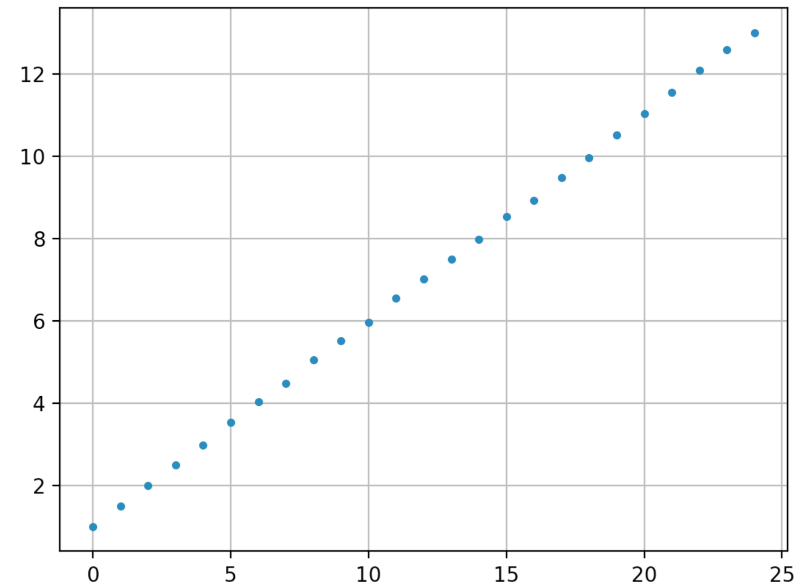
```
import matplotlip.pyplot as plt

def mystere(n):
    L=[simul_X(n) for k in range(1000)]
    return np.mean(L)

N=[k for k in range(25)]
E=[mystere(k) for k in N]
```

```
plt.grid()
plt.plot(N,E, '.')
plt.show()
```

Affichage Python



(2) Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.

(3) (a) Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}$$

(b) En déduire la valeur de $E(X_2)$

(4) Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.

(5) Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. En distinguant $|i-j| = 1$ et $|i-j| \neq 1$, déterminer

$$\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]).$$

(6) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2}\mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}([X_k = i-1]) \qquad (\star)$$

(7) À l'aide de la formule $(\star)$ déterminer la loi de X_3.

(8) (a) Montrer, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que

$$\mathbb{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

(b) Montrer de même que

$$\mathbb{P}([X_k = k+1]) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}\left([X_k = 2]\right).$$

Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.

Montrer que la suite (b_k) définie pour $k \geq 0$ par $b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.

En déduire alors que :

$$\forall k \in \ \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left([X_k = 2]\right) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$$

(9) (a) À l'aide de la formule $(\star)$, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E\left(X_{k+1}\right) = \frac{k+1}{k+2} E\left(X_k\right) + 1$$

(b) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E\left(X_k\right) = \frac{k+2}{2}$$

(c) Soit Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après k tirages.
Justifier que X_k et Y_k ont même espérance, puis retrouver le résultat de la question précédente.

La fin de l'exercice est réservée aux khûbes. On **admettra** pour la suite que :

$$\forall k \in \ \mathbb{N}^*, \qquad V\left(X_k\right) = \frac{k+2}{12}.$$

(10) (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

(b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.