Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°3

Solution

Exercice 1

On peut retrouver une version un peu augmentée de cet exercice dans le sujet du Concours Blanc de Novembre 2021, sujet A.

Partie I - Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = e_1 - e_2 + e_3$ et $v = e_1 - e_2$.

(1) (a) On a : $u = e_1 - e_2 + e_3 = (1, -1, 1)$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vecteur coordonnées.

Utilisons la matrice A de f dans la base canonique. On a

$$AU = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = U$$

donc $f(u) = u$, ou encore $u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

(b) On a : $v = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$. Raisonnons encore *matriciellement*.

$$\mathrm{Mat}(f - \mathrm{id}), \mathcal{B}) = A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$(A - I)V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = U$$

donc $(f - \mathrm{id})v = u$.

(c) On a, d'après les questions précédentes

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{id})^2 v &= (f-\mathrm{id})\left((f-\mathrm{id})v\right)\\ &= (f-\mathrm{id})(u) \qquad \text{car } (f-\mathrm{id})v=u\\ &= 0 \qquad \text{car } u\in\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id})\end{aligned}$$

Ainsi, $(f-\mathrm{id})^2 v = 0$ donc $v\in \mathrm{Ker}\left((f-\mathrm{id})^2\right)$.

(2) (a) Par définition de la matrice f dans la base $\mathcal{C}$, on doit avoir les relations suivantes:

- $f(u)=u$, ce qui est vérifié d'après 1a.
- $f(v)=u+v$, ce qui est vérifié car $f(v)-v=u$ d'après 1b.
- $f(w)=2v+w$.

On recherche donc un vecteur de coordonnées $w=(a,b,0)$ dans la base canonique tel que : $f(w)=2v+w$.

Matriciellement, cela donne :

$$f(w)=2v+w \iff AW=2V+W \iff \begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}3a+b&=&2+a\\-2a&=&-2+b\\a&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}b&=&2\\a&=&0\end{array}\right.$$

Ainsi, $w=(0,2,0)$.
Vérifions à présent que la famille $\mathcal{C}=(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Montrons qu'elle est libre. Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$xu+yv+zw=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&0\\-x-y+2z&=&0\\x&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}y&=&0\\2z&=&0\\x&=&0\end{array}\right. \iff x=y=z=0$$

Ainsi, la famille $\mathcal{C}=(u,v,w)$ est une famille libre composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc $\mathcal{C}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) La matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$ est triangulaire sans 0 sur sa diagonale donc elle est inversible. On en déduit que l'endomorphisme f est bijectif. La matrice A de f dans la base canonique est donc également inversible.

(c) On montre ce résultat par récurrence.

- <u>initialisaton</u>. Pour $n=1$

$$T^1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\times 0\\0&1&2\times 1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

donc la propriété est vraie pour $n=1$.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$,

$$T^n=\begin{pmatrix}1&n&n(n-1)\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^nT = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & 2n+n(n-1) \\ 0 & 1 & 2+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n(n+1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$, ce qui termine la récurrence.

Pour $n = 0$, on a

$$T^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\times(0+1) \\ 0 & 1 & 2\times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc la propriété est encore vraie pour $n = 0$.

Partie II : Étude d'un autre endomorphisme

(3) Soit $P \in \mathcal{E}$. Notons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{F} &\iff P(0) = 0 \\ &\iff a\times 0^3 + b\times 0^2 + c\times 0 + d = 0 \\ &\iff d = 0 \\ &\iff P(X) = aX^3 + bX^2 + cX = af_3(X) + bf_2(X) + cf_1(X) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(f_3, f_2, f_1)$$

donc $\mathcal{F}$ et le sous-espace vectoriel engendré par la famille (f_3, f_2, f_1) donc $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.
De plus, la famille (f_3, f_2, f_1) est libre ((f_3, f_2, f_1) sont des vecteurs de la base canonique).
Donc la famille (f_3, f_2, f_1) est une base de $\mathcal{F}$.

(4) (a) Soient $(P, Q) \in \mathcal{E}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} g(\lambda P + \mu Q)(X) &= (3X+1)(\lambda P + \mu Q)(X) - X^2(\lambda P + \mu Q)'(X) \\ &= \lambda(3X+1)P(X) + \mu(3x+1)Q(x) - \lambda X^2 P'(X) - \mu X^2 Q'(X) \\ &= \lambda\left((X+1)P(X) - X^2P'(X)\right) + \mu\left((3X+1)Q(X) - X^2Q'(X)\right) \\ &= \lambda g(P)(X) + \mu g(Q)(X) \end{aligned}$$

donc g est une application linéaire.

(b) • Soit $P \in \mathcal{F}$. Ainsi, $P(0) = 0$. On a donc :

$$g(P)(0) = (0+1)P(0) - 0^2P'(0) = P(0) = 0$$

donc $g(P)(0) = 0$.

- La fonction $g(P)$ est *a priori* de degré inférieur à 4 mais le terme en x^4 est nul. En effet, si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ alors
$$g(P)(X) = (3X+1)(aX^3 + bX^2 + cX + d) - X^2(3aX^2 + 2bX + c) = X^4(3a - 3a) + \dots.$$
Ainsi, $g(P)$ est de degré inférieur ou égal à 3.

(c) D'après la question précédente, si $P \in \mathcal{F}$, alors $g(P) \in \mathcal{F}$ car $g(P) \in \mathcal{E}$ et $g(P)(0) = 0$ donc g est une application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ donc g est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

(d) On a
$$\begin{aligned} g(f_3)(x) &= (3x+1)x^3 - x^2 3x^2 = 3x^4 + x^3 - 3x^4 \\ &= x^3 \\ &= f_3(x) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} g(f_2)(x) &= (3x+1)x^2 - x^2 2x = 3x^3 + x^2 - 2x^3 \\ &= f_3(x) + f_2(x) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} g(f_1)(x) &= (3x+1)x - x^2 = 3x^2 - x^2 + x = 2x^2 + x \\ &= 2f_2(x) + f_1(x) \end{aligned}$$
Ainsi, on a (attention à l'ordre des vecteurs) :
$$\mathrm{Mat}\,(g, (f_3, f_2, f_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

(e) Comme T est la matrice de g dans la base $\mathcal{H} = (f_3, f_2, f_1)$, T^n est la matrice de g^n dans la base $\mathcal{H}$.

D'autre part, les coordonnées de f_1 dans la base $\mathcal{H} = (f_3, f_2, f_1)$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a alors, d'après la question 2c :
$$T^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n(n-1) \\ 2n \\ 1 \end{pmatrix}$$
ce qui donne
$$g^n(f_1) = n(n-1)f_3 + 2nf_2 + f_1$$
soit
$$g^n(f_1)(x) = n(n-1)x^3 + 2nx^2 + x.$$

Exercice 2

Cet exercice est un mix entre un sujet **INSEEC 2002** *pour le début et* **EDHEC 2004** *pour la deuxième partie avec la suite implicite.*
La fin de l'exercice initial était intéressante également, on montrait par récurrence que f était de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0...

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

(1) **Étude de f.**

(a) La fonction $x \mapsto 1/x^2$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0; +\infty[$ comme inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas. Par composition avec la fonction exponentielle continue sur $\mathbb{R}$, f est donc continue sur chacun des deux intervalles ci-dessus. En 0, on observe que

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} -\frac{1}{x^2} = -\infty,$$

par composition des limites avec la fonction exponentielle, on a

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

et f est continue en 0. Au final, f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Il s'agit ici de déterminer la limite du taux d'accroissement de f en 0, plus précisément, on cherche la limite, lorsque $x \to 0$ de

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} e^{-1/x^2} = \frac{1/x}{e^{1/x^2}}.$$

Or, par croissance comparée, on a $u = o(e^u)$ si $u \to +\infty$, et il suit que

$$\frac{1}{x} \underset{x \to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \to 0}{=} o\left(e^{1/x^2}\right)$$

donc le quotient tend vers 0. Ainsi, f dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(c) Pour des raisons analogues à celles qui donnent f continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0, +\infty[$, f y est également dérivable et même de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}.$$

Avec le même raisonnement que pour le taux d'accroissement de f en 0 (une relation de négligeabilité obtenue par croissance comparée), on a

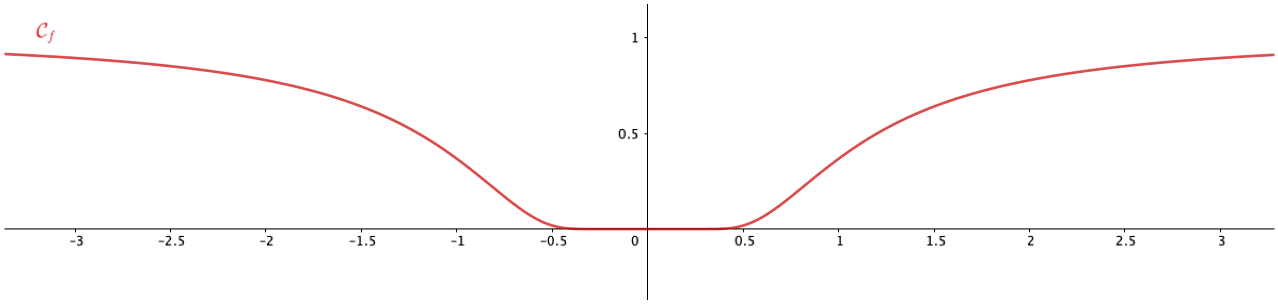
$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$$

et f' est continue en 0, ce qui permet de voir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(d) D'après ce qui précède, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-x^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ car f y est continue. Par le théorème de bijection, f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= [0; 1[$.

(e) Comme $f(0) = f'(0) = 0$, la tangente à l'origine est l'axe des abscisses.
On a déjà fait ci-dessus l'étude de f sur $\mathbb{R}_+$. Comme il est clair que f est paire, l'étude sur $\mathbb{R}_-$ se déduit immédiatement par symétrie.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1



(2) **Étude de** $f(x) - x$. Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

(a) Pour les mêmes raisons que précédemment, f est en fait de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^{/}ast$ et donc sur $]0,1[$ et il en est de même pour g par différence avec la fonction polynomiale $x \mapsto x$. On a

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} - 1$$

et

$$g''(x) = f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-1/x^2} = \frac{4-6x^2}{x^6}e^{-1/x^2}.$$

(b) La dérivée seconde de g s'annule et change de signe sur $[0;1]$ en $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (il suffit de regarder le polynôme du second degré au numérateur, ce qui ne devrait pas poser de difficulté). Comme, d'après l'indication

$$M = g'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 1 < 0$$

on en déduit les tableaux :

x	0		$\sqrt{2/3}$		1
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
g'		$\nearrow$	$M < 0$	$\searrow$	
$g'(x)$			$-$		
g	0		$\searrow$		$\frac{1}{e} - 1$

(3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) C'est un programme classique pour le calcul des termes d'une suite réccurente. À noter qu'en anticipant un peu la question suivante et/ou en ayant remarquer que $f(]0;1[) \subset]0;1[$, il n'y a pas besoin d'intégrer de structure conditionnelle vérifiant si un terme intermédiaire de la suite s'annule.

```
import numpy as np

```

```python
def suite(n) :
    u=3
    for k in range(n):
        u=np.exp(-1/u**2)
    return u
```

(b) On montre cette propriété par récurrence, en utilisant les éléments de l'étude de f ci-avant.

- <u>initialisation.</u> Pour $n=1$, $u_1 = f(u_0) \in]0;1[$ car d'après le tableau de variations de f ci-avant, $f(]0,1[) \subset]0,1[$.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \geq 1$, $u_n \in]0;1[$. Alors, d'après le tableau de variations de f ci-avant, $f(]0,1[) \subset]0,1[$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in]0;1[$ et cette récurrence trèèèès facile est terminée.

(c) Pour $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$ d'après le signe de $g(x)$ sur $]0,1[$ dont tous les termes de la suite sont éléments pour $n \geq 1$. Ainsi, la suite (u_n) est bien strictement décroissante. Étant minorée par 0, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que (u_n) converge vers une certaine limite ℓ vérifiant $\ell \in [0;1]$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, que (u_n) et (u_{n+1}) convergent vers ℓ et que f est continue sur $[0;1]$ (donc en ℓ), on obtient

$$\ell = f(\ell) \iff g(\ell) = 0.$$

Or l'étude précédente montrer que la seule solution de $g(\ell) = 0$ sur $[0;1]$ est nécessairement $\ell = 0$ donc (u_n) converge vers 0.

(4) **Une nouvelle fonction et une suite implicite**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_n(x) = xf\left(\sqrt{\frac{|x|}{n}}\right).$$

(a) Commençons par expliciter $h_n(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$h_n(x) = x\exp\left(-\frac{n}{|x|}\right)$$

Comme $f(0) = 0$, la formule précédente donne $h_n(0) = 0$. Par ailleurs, on cherche une solution **positive** de l'équation $h_n(x) = 1$, on restreint donc l'étude de h_n sur $\mathbb{R}_+$, où la fonction est finalement définie par

$$h_n(x) = \begin{cases} x\exp\left(-\frac{n}{x}\right), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On peut alors réutiliser les résultats de l'étude précédente combinés avec des arguments rigoureux à propos de la composition de fonction (attention, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0, ni la fonction racine) ou bien refaire rapidement une étude une de h_n sur $\mathbb{R}_+$, ce qu'on va plutôt faire ici.
En 0, h_n est continue par algèbre des limites. Ailleurs, c'est le produit de la composée de fonctions usuelles continues (le quotient dans l'exponentielle ne s'annule pas). Donc h_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Pour la même raison, h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (attention, on ne sait pas si h_n est dérivable en 0 mais on en a pas vraiment besoin). Pour $x > 0$, on a

$$h_n'(x) = \left(1 + \frac{n}{x^2}\right)\exp\left(-\frac{n}{x}\right) > 0$$

donc h_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme elle est continue sur $\mathbb{R}_+$, la stricte croissance a lieu en fait sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, $h_n(x) \sim x \to +\infty$, $x \to +\infty$.

Par le théorème de bijection, h_n réalise donc une bijection (strictement croissante) de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, $1 \in \mathbb{R}_+$ admet un unique antécédent $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$ par h_n qui est donc l'unique solution positive de l'équation $h_n(x) = 1$.

(b) On voit que $h_n(1) = e^{-n} < 1 = h_n(\alpha_n)$. Par stricte croissance de h_n, il suit que $\alpha_n > 1$. De plus, en passant au logarithme

$$\begin{aligned} h_n(\alpha_n) = 1 &\iff \alpha_n \exp(-n/\alpha_n) = 1 \\ &\iff \ln(\alpha_n) - n/\alpha_n = 0 \iff \alpha_n \ln(\alpha_n) - n = 0 \\ &\iff \alpha_n \ln(\alpha_n) = n \\ &\iff \alpha_n \text{ solution de } (E_n) \end{aligned}$$

(c) La fonction φ est définie, (continue et) dérivable sur $[1; +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles dérivables. On a, pour $x \geq 1$, $\varphi'(x) = \ln(x) + 1 > 0$. Donc φ est strictement croissante. Par le théorème de bijection, elle en réalise une de $[1; +\infty[$ sur $[\varphi(1); \lim_{+\infty} \varphi[= [0; +\infty[$. Par le même théorème, la bijection réciproque φ^{-1} suit les mêmes variations que φ et est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus

$$\alpha_n \text{ solution de } E_n \iff \varphi(\alpha_n) = n \iff \alpha_n = \varphi^{-1}(n).$$

Par continuité de φ^{-1} sur $\mathbb{R}_+$ et comme $\varphi(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \varphi^{-1}(n) = +\infty.$$

(d) On sait que $\alpha_n \ln(\alpha_n) = n$. Or, comme $\alpha_n > 1$, $\ln(\alpha_n) > 0$ et, en prenant le logarithme de cette quantité, on obtient

$$\ln(\alpha_n \ln(\alpha_n)) = \ln(\alpha_n) + \ln(\ln(\alpha_n)) = \ln(n).$$

Il suit que

$$\ln(\alpha_n)\left(1 + \frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}\right) = \ln(n)$$

ou encore

$$\frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}}.$$

Mais, comme, par croissance comparée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

et que $\ln(\alpha_n) \to +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} = 0$$

et il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)} = 1.$$

(e) On revient à la définition de α_n

$$\begin{aligned} \alpha_n \ln(\alpha_n) = n &\iff \alpha_n = \frac{n}{\ln(\alpha_n)} \\ &\iff \alpha_n \times \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)} \end{aligned}$$

or, on a vu que le membre de droite tendait vers 1, $n \to +\infty$, à la question précédente, ce qui permet d'écrire que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \times \frac{\ln(n)}{n} = 1,$$

ou encore
$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}.$$

Exercice 3

Cet exercice est inspiré du sujet **ECRICOME 2019**, *série S.*

(1) **Simulation en Python.**

(a) Lorsqu'on tire une boule blanche, le nombre de boules noires augmente de 1 et inversement. Il y a `nB+nN` boules en tout dans l'urne et la probabilité d'obtenir une blanche est alors `nB/(nB+nN)`. Il suit que le programme demandé est le suivant :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n) :
    nB=1
    nN=1
    for k in range(n) :
        if rd.rand( )<=nB/(nB+nN) : # si on pioche une blanche
            nN=nN+1 # une noire de plus dans l'urne
        else :
            nB = nB+1 # sinon, une blanche en plus
    return nB
```

(b) La fonction `mystere` renvoie la moyenne d'une liste `L` qui contient 1000 simulations de X_n, c'est donc une fonction qui renvoie une *estimation* de $E(X_n)$.
Les commandes qui suivent permettent de représenter l'évolution de (l'estimation de) $E(X_n)$ en fonction de n. On observe que $E(X_n)$ semble être une fonction affine de n, donc de la forme
$$E(X_n) = an + b.$$
On détermine par lecture graphique les valeurs de a et b. Pour $n = 0$,sait que $X_0 = 1$ donc $E(X_0) = 1$ ce qui donne $b = 1$ et pour $n = 10$, on semble passer par $E(X_{10}) = 6$ ce qui donne $10a + 1 = 6$ ou encore $a = 1/2$. On peut donc conjecturer que
$$E(X_n) = \frac{1}{2}n + 1.$$

(2) A l'issue du premier tirage, on peut avoir 1 ou 2 boules blanches dans l'urne selon qu'on a tiré une blanche ou une noire au premier tirage. Ainsi, $X_1(\Omega) = \{1; 2\}$. De plus,
$$P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{1}{2} = P(N_1) = P(X_1 = 2).$$
C'est la loi uniforme sur $[\![1; 2]\!]$. En particulier, $E(X_1) = 3/2$ et $V(X_1) = \frac{2^2-1}{12} = 1/4$.

(3) (a) Après deux tirages, on a 1 , 2 ou 3 boules blanches, donc $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. De plus,
$$P(X_2 = 1) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$
$$P(X_2 = 3) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
Par complémentarité,
$$P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) - P(X_2 = 3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

(b) Par définition,

$$E(X_2) = 1 \times P(X_2 = 1) + 2 \times P(X_2 = 2) + 3 \times P(X_2 = 3) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{3}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

(4) À chaque tirage, le nombre de boules blanches augmente de 0 ou 1. Après k tirages, on a donc entre 1 et $k+1$ boules blanches, ainsi

$$X_k(\Omega) = [\![1; k+1]\!].$$

(5) Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Entre deux tirages, le nombre de boules blanches est soit le même, soit augmente de 1. Ainsi, on peut déjà écrire que

$$\forall i \notin \{j; j+1\}, \qquad P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = 0.$$

Ensuite, si $i = j$, on tire à nouveau une blanche au $(k+1)-$ième tirage, sachant qu'on a j blanches dans l'urne après k tirages et donc $2+k$ boules au total dans l'urne

$$P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = j) = P_{[X_k=j]}(B_{k+1}) = \frac{j}{2+k}.$$

De la même manière, si $i = j+1$, alors on tire une des $k+2-j$ boules noires

$$P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = j+1) = P_{[X_k=j]}(N_{k+1}) = \frac{k+2-j}{k+2}.$$

(6) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_k = n)\ n \in [\![1; k+1]\!]\}$, on a, pour $i \in [\![1; k+2]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(X_{k+1} = i) &= \sum_{n=1}^{k+1} P_{X_k=n}(X_{k+1} = i)P(X_k = n) \\
&= P_{X_k=i}(X_{k+1} = i)P(X_k = i) + P_{X_k=i-1}(X_{k+1} = i)P(X_k = i-1) \\
&= \frac{i}{k+2}P(X_k = i) + \frac{k+3-i}{k+2}P(X_k = i-1),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(7) On utilise la loi de X_2 et la formule précédente (avec $k = 2$) pour déterminer la loi de X_3 (en gardant à l'esprit que $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. On a

$$P(X_3 = 1) = \frac{1}{4}P(X_2 = 1) = \frac{1}{24},$$

$$P(X_3 = 2) = \frac{2}{4}P(X_2 = 2) + \frac{3}{4}P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24},$$

$$P(X_3 = 3) = \frac{3}{4}P(X_2 = 3) + \frac{2}{4}P(X_2 = 2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

et enfin

$$P(X_3 = 4) = \frac{1}{4}P(X_2 = 3) = \frac{1}{24},$$

ce qu'on peut résumer dans le tableau suivant:

i	1	2	3	4	
$P(X_3 = i)$	1/24	11/24	11/24	1/24	1

(8) (a) On procède comme demandé par récurrence.

- <u>initialisation</u>. Pour $k = 1$, on a $P(X_1 = 1) = 1/2 = 1/(1+1)!$ et la formule est vraie.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Alors, par la question (6),

$$P(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2} P(X_k = 1) + 0 = \frac{1}{k+2} \times \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+2)!}$$

et la récurrence est terminée.

(b) C'est exactement la même chose; on a bien $P(X_1 = 2) = 1/2$ et

$$P(X_{k+1} = k+2) = 0 + \frac{k+3-(k+2)}{k+2} \times P(X_k = k+1) = \frac{1}{k+2} \times \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+2)!}.$$

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}([X_k = 2])$.

Par définition,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+2)! P(X_{k+1} = 2) = (k+2)! \left[\frac{2}{k+2} P(X_k = 2) + \frac{k+1}{k+2} P(X_k = 1) \right] \\ &= 2(k+1)! P(X_k = 2) + (k+1)!(k+1) \times \frac{1}{(k+1)!} \\ &= 2a_k + (k+1). \end{aligned}$$

On pose alors $b_k = a_k + k + 2$. On a

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_{k+1} + k + 1 + 2 \\ &= 2a_k + (k+1) + k + 1 + 2 \\ &= 2(a_k + k + 2) \\ &= 2b_k \end{aligned}$$

Ainsi, (b_k) est géométrique de raison 2. Il suit qu'on peut écrire

$$b_k = 2^{k-1} b_1 = 2^{k-1}(a_1 + 3) = 2^{k-1}(2! P(X_1 = 2) + 3) = 2^{k+1}.$$

Il suit que

$$a_k = b_k - k - 2 = 2^{k+1} - k - 2,$$

et enfin

$$P(X_k = 2) = \frac{a_k}{(k+1)!} = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!},$$

ce qui est la formule attendue. Ouf!

(9) (a) C'est de loin la question la plus difficile de l'exercice (et du sujet de ce DS). On somme la formule de la Question (6) et on découpe et on utilise le théorème de transfert et la linéarité

de l'espérance.

$$\begin{aligned}
E(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+2} iP(X_{k+1}=i) \\
&= \sum_{i=1}^{k+2} i\left[\frac{i}{k+2}P(X_k=i)+\frac{k+3-i}{k+2}P(X_k=i-1)\right] \\
&= \frac{1}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} i^2P(X_k=i)-\frac{1}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} i^2P(X_k=i-1)+\frac{k+3}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} iP(X_k=i-1) \\
&= \frac{1}{k+2}\left(\sum_{i=1}^{k+1} i^2P(X_k=i)-\sum_{i=2}^{k+2} i^2P(X_k=i-1)\right)+\frac{k+3}{k+2}\sum_{i=2}^{k+2} iP(X_k=i-1) \\
&= \frac{1}{k+2}\left(\sum_{i=1}^{k+1} i^2P(X_k=i)-\sum_{j=1}^{k+1} (j+1)^2P(X_k=j)\right)+\frac{k+3}{k+2}\sum_{j=1}^{k+1} (j+1)P(X_k=j) \\
&= \frac{1}{k+2}\big(E(X_k^2)-E((X_k+1)^2)\big)+\frac{k+3}{k+2}E(X_k+1) \\
&= \frac{1}{k+2}\big(E(X_k^2)-E(X_k^2)-2E(X_k)-1\big)+\frac{k+3}{k+2}E(X_k)+\frac{k+3}{k+2} \\
&= \frac{k+1}{k+2}E(X_k)+1,
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) Si la question précédente était vraiment difficile, celle-ci n'est qu'une simple récurrence (qui utilise bien sûr la dernière formule obtenue).

- initialisation. Pour $k=1$,

$$E(X_1)=\frac{3}{2}=\frac{1+2}{2},$$

et la formule est vraie.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $k\in\mathbb{N}^*$, on ait

$$E(X_k)=\frac{k+2}{2}.$$

Alors, par la question précédente,

$$E(X_{k+1})=\frac{k+1}{k+2}E(X_k)+1=\frac{k+1}{k+2}\times\frac{k+2}{2}+1=\frac{k+1}{2}+1=\frac{k+3}{2},$$

ce qui est bien la formule au rang $k+1$ et termine la récurrence. On constate que la formule démontrée est bien la formule conjecturée avec Python!

(c) La situation ici est symétrique par rapport aux couleurs des boules. En permutant les couleurs des boules noires ou blanches et avec le même raisonnement, on obtient exactement les mêmes résultats pour Y_k que pour X_k, rien ne change, ce qui donne notamment $E(X_k)=E(Y_k)$. Mais comme il est clair que $X_k+Y_k=k+2$ car après k tirages, le total des boules blanches et noires fait nécessairement $k+2$, la linéarité de l'espérance donne

$$k+2=E(X_k+Y_k)=E(X_k)+E(Y_k)=2E(X_k)$$

et on retrouve

$$E(X_k)=\frac{k+2}{2}.$$

(10) (a) Par linéarité de l'espérance, la variable $X_k/(k+2)$ admet une espérance et

$$E\left(\frac{X_k}{k+2}\right) = \frac{1}{2}$$

Des propriétés de la variance et du résultat admis dans l'énoncé, on déduit

$$V\left(\frac{X_k}{k+2}\right) = \frac{1}{(k+2)^2}V(X_k) = \frac{1}{12(k+2)}.$$

En appliquant Bienaymé-Tchebychev, on a alors, pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - E\left(\frac{X_k}{k+2}\right)\right| > \varepsilon\right) \\ &\leq \frac{V\left(\frac{X_k}{k+2}\right)}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{1}{12\varepsilon(k+2)} \\ &\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(b) Après k tirages, il y a X_k boules blanches et $k+2$ boules en tout, la quantité $X_k/(k+2)$ représente donc la proportion de boules blanches après k tirages. Le résultat précédent peut s'interpréter comme le fait que, lorsque k devient grand, cette proportion *tend vers* (au sens de la *convergence en probabilités*) vers $1/2$ donc vers une répartition égale de boules noires et de boules blanches.