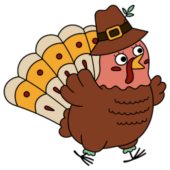
Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.



Devoir Maison n°4

À rendre le 28/11

Amuse-bouche

Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left(1-\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^k\right)$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\left(\exp\left(\frac{k^2+1}{k^4+1}\right)-1\right)$.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 2$ par $u_n = \displaystyle\frac{1}{\ln(n!)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

(1) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k-1}$.

(2) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq \ln(n)$.

(3) À l'aide de la question précédente et avec une majoration (grossière) du dénominateur, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}u_n$.

(1) Montrer que (u_n) et décroissante. Montrer ensuite qu'elle converge vers une limite $\ell \in [0;1]$.

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = n^\alpha u_n, \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n).$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$w_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right).$$

(b) En déduire l'existence d'une réel β (à exprimer en fonction de α tel que
$$w_n \sim \frac{2\alpha-3}{2n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty.$$

(c) Montrer qu'il existe une unique valeur α_0 de α que l'on précisera pour laquelle la série $\sum w_n$ converge.

(d) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$ en fonction de u_{n+1}.

(e) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que $u_n \sim \dfrac{C}{n^{\alpha_0}}, \quad n \to +\infty$.

(f) Quelle est alors la valeur de ℓ?

Exercice 3

Soit a un nombre strictement positif. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{a+k}{2a+k}$.

(1) Montrer que, pour tout réel $u \in]-1;+\infty[$, on a:

$$\frac{u}{1+u} \leq \ln(1+u) \leq u.$$

(2) En déduire que

$$\exp\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{a+k}\right) \leq P_n \leq \exp\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{2a+k}\right)$$

(3) Montrer qu'alors la suite (P_n) est convergente vers 0.

(4) (***) En utilisant une comparaison série-intégrale, obtenir l'encadrement

$$\frac{1}{e\left(\frac{n}{a}+1\right)^a} \leq P_n \leq \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2a}+1\right)^a}$$

(5) En déduire la nature de la série $\sum P_n$ lorsque $a = 1$ et lorsque $a = 2$. Préciser la somme en cas de convergence.

(6) Dans une urne, on dispose initialement a boule rouge et a boule noire (indiscernables au toucher). On tire ensuite une boule: si elle est noire, on arrête; si elle est rouge, on la remplace dans l'urne par deux boules rouges, et on recommence jusqu'à obtention d'une boule noire. On note X la v.a correspondant au nombre de tirages effectués.

(a) Préciser $X(\Omega)$. Montrer que $P(X=1) = P_0$ puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X > n) = P_{n-1}$.

(b) Recopier et compléter le programme permettant de simuler X.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(a) :
    r=....
    x=1
    while rd.rand() > ...... :
        r= r+1
        x = ....
    return x
```

(c) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

(d) (**) Que peut-on dire de $E(X)$ dans le cas $a = 1$? Dans le cas $a = 2$?