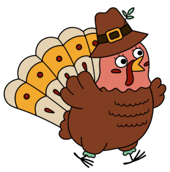
Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.



Devoir Maison n°4

À rendre le 28/11

Amuse-bouche

Pour chacune des séries suivantes, préciser la nature et calculer la somme en cas de série convergente:

$$(i)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{3\times 4^n},\qquad (ii)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}},\qquad (iii)\ \sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$(iv)\ \sum_{n\geq 0}\frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}},\qquad (v)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^2-2}{n!},\qquad (vi)\ \sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Exercice 1

On cherche à montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(1) Montrer, à l'aide de l'expression conjuguée, que

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\sim\frac{1}{2n^{3/2}},\qquad n\to+\infty.$$

(2) En déduire le résultat cherché.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie pour $n\geq 2$ par $\displaystyle u_n=\frac{1}{\ln(n!)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

(1) Montrer que, pour tout entier $k\geq 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leq\frac{1}{k-1}$.

(2) En déduire que, pour tout $n\geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\ln(n)$.

(3) À l'aide de la question précédente et avec une majoration (grossière) du dénominateur, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 3

Un athlète fait du saut en hauteur. On numérote les différentes hauteurs dans l'ordre. On suppose que les sauts sont indépendants entre eux et que la probabilité de réussir le saut numéro n est de $1/n$. L'athlète effectue les sauts dans l'ordre et s'arrête au premier échec.

On introduit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'évènement S_k "l'athlète réussit le $k-$ième saut".

(1) Que vaut, d'après l'énoncé $P(S_k)$ (en fonction de k)?

(2) On introduit l'évènement A_n : "l'athlète réussit les n premiers sauts".
  (i) Exprimer A_n à l'aide des évènements S_k.
  (ii) Justifier que $A_{n+1} \subset A_n$.
  (iii) En déduire, avec un résultat du cours de première année, que presque sûrement l'athlète rate un saut à un moment.

On note X la v.a correspondant au numéro du premier saut raté.

(3) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie une simulation de X

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X() :
    k= ...
    p= ...
    while ...... :
        p = ...
        k = ...
    return k
```

(4) Écrire une suite d'instruction permettant d'obtenir une estimation de $E(X)$. Exécuter le programme et donner la valeur affichée.

(5) Déterminer la loi de X.

(6) Montrer que X admet une espérance et préciser sa valeur.