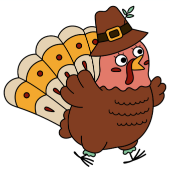

Devoir Maison n°4

Solution

Amuse-bouche

C'est parti :

(i) On travaille avec le terme général pour retrouver des séries de références

$$\frac{(-1)^{n+1}}{3\times 4^n} = -\frac{1}{3}\times\left(\frac{-1}{4}\right)^n$$

et on reconnait le multiple du terme général d'une série géométrique convergente (car $|-1/4|<1$). Donc la série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3\times 4^n} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n = -\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+1/4} = -\frac{4}{15}.$$

(ii) Cette deuxième série ne nous dit rien... commençons par voir vers quoi tend son terme général quand même

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(-\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(0) = 1$$

(par croissance comparée). Ainsi, le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

(iii) Ici, on pense à un télescopage mais il est un poil astucieux car on va écrire $2=1+1$ et répartir de chaque côté pour faire apparaître deux sommes télescopiques

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{2}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1+1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\\
&= 1-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Donc la série converge et

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{2}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(iv) Comme pour la première série, on travaille sur le terme général pour faire apparaître des séries géométriques (dérivées). Observant que $(-1)^{n+1} = (-1)^2(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$, on a

$$\frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}} = 2n\left(\frac{-1}{7}\right)^{n-1}$$

et on reconnait le double du terme général d'une série géométrique dérivée convergente (car $|-1/7| < 1$). Il suit que la série converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{-1}{7}\right)^{n-1} = 2 \times \frac{1}{(1+1/7)^2} = \frac{49}{32}.$$

(v) Il nous faut notre astuce usuelle de réécriture $n^2 = n(n-1) + n$ ici pour simplifier la factorielle au dénominateur. On a, pour $n \geq 2$,

$$\frac{n^2-2}{n!} = \frac{n(n-1)+n-2}{n!} = \frac{1}{(n-2)! + \frac{1}{(n-1)!}} - \frac{2}{n!}$$

et on reconnait une combinaisons de termes généraux de séries exponentielles de paramètre 1 décalées (de 2, de 1 et de 0). Ainsi, la série converge. Attention aux premiers termes pour le calcul de la somme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} &= -2-1+\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} \\
&= -3+\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= -3+\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} + \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} - 1\right) - 2\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 2\right) \\
&= 3e.
\end{aligned}$$

(vi) Travaillons un peu sur ce terme général

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \exp\left(n\left(\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(0) = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

Exercice 1

On cherche à montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(1) Comme suggéré par l'énoncé,

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} &= \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \frac{1}{n\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1+1/n}\right)} \\
&\sim \frac{1}{2n\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

(2) On raisonne à l'aide du critère d'équivalence :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \geq 0$
- La série $\sum \dfrac{1}{2n^{3/2}}$ est convergente (mutiple d'une série de Riemann convergente);
- D'après la question précédente, on a bien $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \sim \dfrac{1}{2n^{3/2}}$, $n \to +\infty$.

Ainsi, $\sum \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ converge.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 2$ par $u_n = \dfrac{1}{\ln(n!)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

(1) Soit un entier $k \geq 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $[k-1, k]$, on a, pour tout $t \in [k-1, k]$

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k-1}$$

Par positivité de l'intégrale, cela donne

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k-1} = \frac{1}{k-1}.$$

(2) Soit un entier $n \geq 1$. En utilisant l'inégalité de la question précédente qu'on va sommer, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k-1} \\
&\geq \sum_{k=2}^{n+1} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \text{(par Chasles)} \\
&= \ln(n+1) \\
&\geq \ln(n).
\end{aligned}$$

(3) Au dénominateur, pour $n \geq 2$, observant que $\ln(k) \leq \ln(n)$ si $k \leq n$,

$$\begin{aligned}
\ln(n!) &= \ln(1 \times 2 \times ... \times n) = \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + ... + \ln(n) \\
&\leq \ln(n) + \ln(n) + ... + \ln(n) = n\ln(n)
\end{aligned}$$

Par passage à l'inverse, on a

$$\frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{\ln(n)}{n\ln(n)} = \frac{1}{n}.$$

Or la série $\sum 1/n$ diverge et par critère de comparaison pour des séries à termes positifs, on déduit que la série

$$\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \quad \text{diverge.}$$

Exercice 3

Un athlète fait du saut en hauteur. On numérote les différentes hauteurs dans l'ordre. On suppose que les sauts sont indépendants entre eux et que la probabilité de réussir le saut numéro n est de $1/n$. L'athlète effectue les sauts dans l'ordre et s'arrête au premier échec.

On introduit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'évènement S_k "l'athlète réussit le $k-$ième saut".

(1) Par traduction directe de l'énoncé, on a $P(S_k) = \dfrac{1}{k}$.

(2) On introduit l'évènement A_n : "l'athlète réussit les n premiers sauts".

(i) Par définition, on a $A_n = S_1 \cap S_2 \cap .. \cap S_n = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} S_k$.

(ii) Il suit de l'écriture précédente que

$$A_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} S_k \subset \bigcap_{k=1}^{n} S_k = A_n$$

oui plus intuitivement, si on a réussit les $n+1$ premiers sauts, on a *a fortiori* réussi les les n premiers.

(iii) Un résultat du cours de première année de l'ancien programme ECE intitulé *théorème de la limite monotone* dit la chose suivante :

Hors Programme mais...

Soient (A_n) une suite d'évènement décroissante (au sens de l'inclusion) et (B_n) une suite d'évènements croissante (au sens de l'inclusion). Alors

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n), \qquad P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$

Ce résultat est en fait une conséquence du théorème de convergence monotone (les suites $(P(A_n)$ et $(P(B_n)$ sont respectivement décroissante minorée par 0 et croissante majorée par 1).

Bref. Par indépendance des sauts (hypothèse de l'énoncé), on peut écrire

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} P(S_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n!}$$

Ainsi, la probabilité de réussir tous les sauts, évènement qui s'écrit comme l'intersection (infinie) de tous les A_n, est alors égale à

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

On note X la v.a correspondant au numéro du premier saut raté.

(3) La variable k numérote les sauts, et intervient pour le calcul de la probabilité de réussir le saut, qui elle est stockée dans la variable p.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

```
def simul_X() :
    k= 1
    p= 1/k
    while rd.rand() <= p : # tant qu'on réussit
        p = 1/(k+1)
        k = k+1
    return k
```

(4) Une *estimation* de l'espérance s'obtient avec la moyenne d'un échantillon (de taille plutôt grande, disons 1000 ou 10000) de X.

```
N=10000 # taille de l'échantillon
echantillon=[simul_X() for k in range(N)]
print(np.mean(echantillon))
```

Une exécution de ce programme affiche une valeur proche de 2.71.

(5) Commençons par préciser l'univers image $X(\Omega)$. On ne peut pas rater le premier saut (proba de succès 1) mais on peut rater le deuxième saut, ou réussir une série arbitrairement longue de sauts. Donc $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. Pour $n \geq 2$ entier, on écrit

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P(A_{n-1} \cap \overline{S}_n) \\ &= P(A_n)P(\overline{S}_n) \qquad \text{(par indépendance des sauts)} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \times \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{n-1}{n!} \end{aligned}$$

(6) On sait que X admet une espérance si et seulement si la série $\sum nP(X + n)$ converge (absolument). Or, pour tout $n \geq 2$,

$$nP(X = n) = n\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$$

et on reconnait le terme général de la série exponentielle (de paramètre 1) dont les indices sont décalés (de 2). C'est donc une série convergente et X admet une espérance. De plus

$$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e,$$

ce qui est cohérent avec l'estimation précédente.