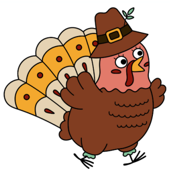
Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.



Devoir Maison n°4

Solution

Amuse-bouche

On détermine la nature des séries en trouvant un équivalent du terme général. On commence par observer que notre terme général est négatif. On prend son opposé

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^k - 1 &= \exp\left(k\ln\left(\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right)-1\\ &= \exp\left(\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)-1\\ &= 1-+\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)-1\\ &\sim \frac{1}{k}, \quad k\to+\infty\end{aligned}$$

Or $\sum 1/k$ diverge. Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left(\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^k-1\right)$ diverge et c'est aussi le cas pour la série initiale qui en est juste l'opposé.

Étant clair que $\dfrac{k^2+1}{k^4+1}\sim\dfrac{1}{k^2}\longrightarrow 0,\ k\to+\infty$, on peut utiliser l'équivalent usuel $e^u-1\sim u,\ u\to 0$ avec $u=\dfrac{k^2+1}{k^4+1}$, ce qui donne

$$\exp\left(\frac{k^2+1}{k^4+1}\right)-1\sim\frac{k^2+1}{k^4+1}\sim\frac{1}{k^2}$$

Or, la série de terme général $1/k^2$ est convergente (Riemann). Comme tout est positif ici, le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs permet de conclure que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\left(\exp\left(\frac{k^2+1}{k^4+1}\right)-1\right)$ converge.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie pour $n\geq 2$ par $u_n=\dfrac{1}{\ln(n!)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

(1) Soit un entier $k \geq 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $[k-1,k]$, on a, pour tout $t \in [k-1,k]$

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k-1}$$

Par positivité de l'intégrale, cela donne

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k-1} = \frac{1}{k-1}.$$

(2) Soit un entier $n \geq 1$. En utilisant l'inégalité de la question précédente qu'on va sommer, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k-1} \\ &\geq \sum_{k=2}^{n+1} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad\qquad \text{(par Chasles)} \\ &= \ln(n+1) \\ &\geq \ln(n). \end{aligned}$$

(3) Au dénominateur, pour $n \geq 2$, observant que $\ln(k) \leq \ln(n)$ si $k \leq n$,

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \ln(1 \times 2 \times ... \times n) = \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + ... + \ln(n) \\ &\leq \ln(n) + \ln(n) + ... + \ln(n) = n\ln(n) \end{aligned}$$

Par passage à l'inverse, on a

$$\frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{\ln(n)}{n\ln(n)} = \frac{1}{n}.$$

Or la série $\sum 1/n$ diverge et par critère de comparaison pour des séries à termes positifs, on déduit que la série

$$\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \quad \text{diverge.}$$

Exercice 2

Cet exercice est inspiré d'un exercice d'oral **HEC** *avec préparation, voie E.*

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n.$$

(1) On commence par montrer, par récurrence immédiate que $u_n > 0$ pour tout n. C'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, le produit de quantités strictement positives le restant, c'est encore vrai au rang $n+1$. Ensuite, on observe que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+5} \leq \frac{2n+5}{2n+5} = 1$$

et donc $u_{n+1} \leq u_n$. Ainsi, (u_n) est bien décroissante. Il suit que $u_n \leq u_1 = 1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1]$. Comme la suite est décroissante et minorée par 0, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que (u_n) converge vers une limite ℓ. De l'encadrement sur les termes de la suite ci-dessus obtenus, on peut conclure que $\ell \in [0;1]$. (*Le passage à la limite transforme les inégalités en inégalités larges.*)

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = n^\alpha u_n, \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n).$$

(a) C'est un calcul, utilisant les propriétés du log. Sans difficulté.

$$\begin{aligned}
w_n &= \ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha u_n\right) \\
&= \alpha\ln(n+1) + \ln(2) + \ln((n+1)) + \ln(u_n) - \ln(2n+5) - \alpha\ln(n) - \ln(u_n) \\
&= \alpha\ln(n+1) + \ln((n+1)) - \ln(n+5/2) - \alpha\ln(n) \\
&= \alpha\ln(n+1) + \ln((n+1)) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right) - \alpha\ln(n) - \ln(n) \\
&= (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)
\end{aligned}$$

(b) On rappelle que, pour $u \to 0$,

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad u \to 0.$$

Comme

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{5}{2n} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right) = \frac{5}{2n} - \frac{25}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
w_n &= (\alpha+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{5}{2n} - \frac{25}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{2\alpha-3}{n} + \frac{21-4\alpha}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

et on a bien la formule attendue en posant

$$\beta = \frac{21-4\alpha}{8}.$$

(c) Pour $\alpha \neq 3/2$, $2\alpha - 3 \neq 0$ et donc

$$w_n \sim \frac{2\alpha-3}{n}, \ n \to +\infty.$$

Par critère d'équivalence pour les séries, comme $\sum \frac{2\alpha-3}{n}$ diverge (multiplie de la série harmonique), il suit que $\sum w_n$ diverge. En revanche, si $\alpha = 3/2$, alors $\beta \neq 0$ et

$$w_n \sim \frac{\beta}{n^2}, \ n \to +\infty.$$

Cette fois, par convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$, le critère d'équivalence affirme que $\sum w_n$ converge. On a donc bien

$$\sum w_n \text{ converge } \iff \alpha = \alpha_0 = \frac{3}{2}.$$

(d) On reconnait une somme télescopique. En effet

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} w_k &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(v_{k+1} - \ln(v_k)) \\
&= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_1) \qquad \text{(par telescopage)} \\
&= \ln\left((n+1)^{\alpha_0} u_{n+1}\right) - \ln\left(2^{\alpha_0} \cdot (2/5)\right)
\end{aligned}$$

(e) D'après la question précédente,

$$\ln\left(n^{\alpha_0}u_n\right) = \sum_{k=1}^{n-1} + \ln(v_1).$$

Comme la série $\sum w_n$ converge, en notant S sa somme, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(n^{\alpha_0}u_n\right) = S + \ln(v_1).$$

En notant alors $C = \exp(S + \ln(v_1))$, on a bien

$$\frac{n^{\alpha_0}u_n}{C} \longrightarrow 1 \iff u_n \sim \frac{C}{n^{\alpha_0}}.$$

(f) On a, en particulier, que

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{C}{n^{3/2}} = 0.$$

Exercice 3

Cet exercice est inspiré d'un exercice d'oral **ESCP** *avec préparation, voie S.*

Soit a un nombre strictement positif. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{a+k}{2a+k}$.

(1) On a déjà vu environ 364 fois l'inégalité de droite qui se montre notamment par un argument de concavité du log (la courbe est au dessous de ses tangentes notamment celle en 0). Montrons l'inégalité de gauche. On pose, pour $u > -1$,

$$h(u) = \ln(1+u) - \frac{u}{1+u}$$

La fonction h est clairement dérivable et

$$h'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2} = \frac{u}{(1+u)^2}.$$

Il est alors facile de dresser le tableau de variations de h:

u	-1		0		$+\infty$
$h'(u)$	‖	$-$	0	$+$	
h	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

On a bien que, pour tout $u > -1$, $h(u) \geq 0$ ou encore que $\ln(1+u) \geq \dfrac{u}{1+u}$ ce qui est bien ce qu'on voulait.

(2) Il est difficile de travailler avec des produits. La méthode classique est de passer au log pour travailler avec une somme. On a

$$P_n = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{a+k}{2a+k}\right)\right) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{a}{a+k}\right)\right).$$

En appliquant l'encadrement précédent avec $u = \dfrac{a}{a+k}$, on obtient

$$\frac{\frac{a}{a+k}}{1+\frac{a}{a+k}} \leq \ln\left(1+\frac{a}{a+k}\right) \leq \frac{a}{a+k}$$

ou encore

$$\frac{a}{2a+k} \leq \ln\left(1+\frac{a}{a+k}\right) \leq \frac{a}{a+k}$$

En multipliant par -1, en passant à la somme et en composant par l'exponentielle croissante qui préserve les inégalités, on a bien

$$\exp\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{a}{a+k}\right) \leq P_n \leq \exp\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{a}{2a+k}\right)$$

(3) Pour $a > 0$ fixé, on peut écrire

$$\frac{a}{a+k} \sim \frac{a}{k}, \qquad \frac{a}{2a+k} \sim \frac{a}{k}$$

et la série $\sum a/k$ diverge (Riemann). Par critère d'équivalence (pour les SATP), les deux séries correspondantes divergent. Donc les deux sommes partielles

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a}{a+k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{a}{2a+k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et par composition avec l'exponentielle, on a

$$\exp\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{a}{a+k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \exp\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{a}{2a+k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit, par théorème des gendarmes, que $P_n \to 0$.

(4) (***) Là ça va devenir technique. La comparaison série intégrale permet souvent des estimation relativement précises de sommes partielles. Travaillons pour commencer avec le terme de gauche de l'encadrement ci-dessus. Sans difficulté, on obtient, pour $k \geq 1$,

$$\frac{a}{a+k} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{a}{a+t}\mathrm{d}t$$

Puis, par somme et Chasles

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a}{a+k} \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{a}{a+t}\mathrm{d}t = 1+\int_{0}^{n}\frac{a}{a+t}\mathrm{d}t = 1+[a\ln(a+t)]_0^n = 1+a\ln\left(\frac{a+n}{a}\right)$$

Il suit

$$\exp\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{a}{a+k}\right) \geq \exp\left(-1-a\ln\left(\frac{a+n}{a}\right)\right) = \frac{1}{e\left(1+\frac{n}{a}\right)^{a}},$$

ce qui est bien le minorant voulu. Le majorant s'obtient de la même manière. On a au final l'encadrement

$$\frac{1}{e\left(\frac{n}{a}+1\right)^{a}} \leq P_n \leq \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2a}+1\right)^{a}}$$

(5) Pour $a = 1$ l'encadrement précédent s'écrit

$$\frac{1}{e\,(n+1)} \leq P_n \leq \frac{2}{n+3}.$$

Or comme la série $\sum 1/[e(n+1)]$ diverge (Riemann), on peut conclure par comparaison (tout est positif) que $\sum P_n$ diverge.

Pour $a = 2$, l'encadrement en revanche donne

$$\frac{1}{e\left(\frac{n}{2}+1\right)^2} \leq P_n \leq \frac{1}{\left(\frac{n+1}{4}+1\right)^2}$$

On peut alors utiliser le critère de comparaison; le majorant est équivalent au multiple de $\sum 1/n^2$ qui converge donc $\sum P_n$ converge. Mais on demande la somme... Donc on doit pouvoir calculer. Revenons alors à la définition de P_n dans ce cas

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=0}^{n} \frac{2+k}{4+k} = \prod_{k=2}^{n+2} \frac{k}{2+k} \\ &= \frac{2\times 3}{(n+3)\times(n+3)} \qquad\qquad \text{par télescopage} \\ &= 6\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, encore par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 6\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right) = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+4}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

☞ Le sujet initial demandait la nature de $\sum P_n$ en fonction de a. On laisse le soin au lecteur ou à la lectrice le plaisir de répondre avec cette question (on a tout ce qu'il faut pour!).

(6) Dans une urne, on dispose initialement a boule rouge et a boule noire (indiscernables au toucher). On tire ensuite une boule: si elle est noire, on arrête; si elle est rouge, on la remplace dans l'urne par deux boules rouges, et on recommence jusqu'à obtention d'une boule noire. On note X la v.a correspondant au nombre de tirages effectués.

(a) On peut obtenir la boule noire dès le premier tirage mais on peut aussi tirer une série arbitrairement longue de boules rouges consécutives (surtout qu'on en rajoute...) donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

On introduit les évènements R_i (resp. N_i) "la boule obtenue au $i-$ème tirage est rouge (resp. noire)". Alors

$$P(X=1) = P(N_1) = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = P_0.$$

Puis, pour $n \geq 1$, par la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned} P(X>n) &= P(R_1\cap ...\cap R_n) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)...P_{R_1\cap..\cap R_{n-1}}(R_n) \\ &= \frac{a}{2a}\times\frac{a+1}{2a+1}\times ...\times\frac{a+n-1}{2a+n-1} \\ &= P_{n-1}. \end{aligned}$$

(b) Si r représente le nombre de boules rouges dans l'urne, il y a alors $r + a$ boules en tout dans l'urne.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

```python
def simul_X(a) :
    r= a # on commence avec a boules rouges
    x=1
    while rd.rand() > a/(r+a) : # tant qu'on pioche des rouges
        r= r+1 # on rajoute une rouge
        x = x+1 # un tirage de plus à faire
    return x
```

(c) C'est une question classique qu'on rencontre souvent et qu'il faut savoir faire ! On commence par observer que

$$[X = n] \cup [X > n] = [X > n-1]$$

donc, par incompatibilité

$$P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n)$$

On somme !

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} j\left(P(X > k-1) - P(X > k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(X > k) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)P(X > j) - \sum_{k=1}^{n} kP(X > k) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} jP(X > j) + \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j) - \sum_{k=1}^{n} kP(X > k) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j) - nP(X > n),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait!

(d) (**) On sait que X admet une espérance si et seulement si la série $\sum nP(X = n)$ converge (absolument). Commençons par observer, d'après ce qui précède que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) &= \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j) - nP(X > n) \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} P_{j-1} - nP_{n-1} = 1 - nP_n + \sum_{k=0}^{n} P_k
\end{aligned}$$

- Dans le cas où $a = 1$. D'après tout ce qui précède (notamment l'encadrement des Questions $(4) - (5)$),

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = 1 - nP_n + \sum_{k=0}^{n} P_k \geq 1 - \frac{2n}{n+3} + \sum_{k=0}^{n} P_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc X n'admet pas d'espérance.

- Dans le cas où $a = 2$. L'encadrement obtenue aux Questions (4) et (5) permet de voir que nP_n tend vers 0 grâce au théorème des gendarmes. Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = 1 - nP_n + \sum_{k=0}^{n} P_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} P_k = 1 + 2 = 3.$$

Ainsi, X admet une espérance et $E(X) = 3$.