Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°6

À rendre le 03/01

Amuse-bouche

Les deux questions sont indépendantes.

(1) À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer la convergence et calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{t^3}\mathrm{d}t$.

(2) À l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$, donner un critère de convergence (sur α) pour la convergence de l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\alpha}$$

Exercice - *Méthode de la variation de la constante*

Le but de l'exercice est d'introduire une méthode (qui n'est pas à apprendre!) permettant de trouver une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

(1) On considère une fonction f, définie et continue sur un intervalle I, un réel $a \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle, d'inconnue y,

$$(E_1) \qquad y'(t) + ay(t) = f(t), \qquad (t \in I).$$

(a) Expliciter l'équation homogène (H_1) associée à (E_2) et expliciter une fonction y_1, base de l'espace vectoriel des solutions de (H_1).

(b) On introduit alors la fonction $y_0 : t \mapsto \lambda(t)y_1(t)$, où λ est une fonction définie et dérivable sur I que l'on cherche à déterminer.

(i) Montrer que y_0 est solution de (E_1) si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\lambda'(t) = f(t)e^{at}.$$

(ii) Conclure que $y_0 : t \mapsto \left(\int_\alpha^t f(s)e^{as}\mathrm{d}s\right) e^{-at}$, où α est un élément de I, est solution particulière de (E_1).

(2) **Exemple.** Considérons l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad y' - y = t^2e^t$$

(a) Déterminer une base (y_1) de l'espace des solutions de l'équation homogène associée.

(b) Déterminer avec la méthode précédente une solution particulière y_0 de (E_1).

(c) Exprimer l'ensemble de toutes les solutions de (E_1).

Problème 1

Partie 1 - Réduction de matrices 3×3

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ M^3 - 3M = 2I\}.$$

(1) L'ensemble $\mathcal{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

(2) Vérifier que $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$.

(3) Calculer AU et BU où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En déduire une première valeur propre λ_1 commune à A et B.

(4) Déterminer un polynôme annulateur commun à A et B. Vérifier que λ_1 est racine de ce dernier, puis, à l'aide d'une division euclidienne, déterminer toutes les autres racines de ce polynôme.

(5) Montrer que toutes les matrices de $\mathcal{F}$ sont inversibles.

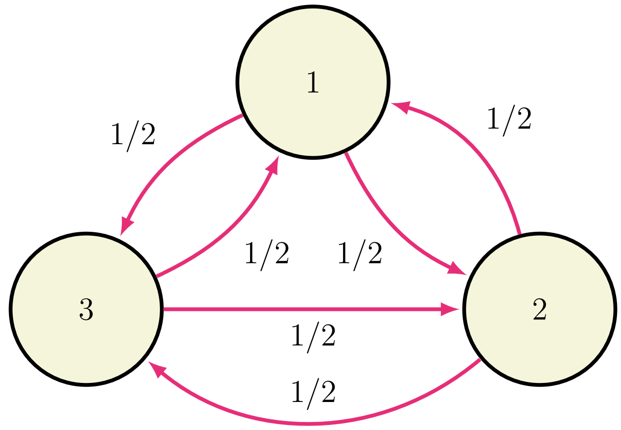
(6) **Réduction de** A.
- (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ où λ_2 est à expliciter.
- (b) Déterminer une base (V, W) de $E_{\lambda_2}(A)$.
- (c) Montrer que (U, V, W) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et former la matrice P de passage de la base canonique vers cette base.
- (d) Déterminer, à l'aide d'un pivot de Gauss simultané, P^{-1}.
- (e) Que vaut $D = P^{-1}AP$?
- (f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
- (g) Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n.

(7) **Réduction de** B**.**
- (a) Montrer qu'on a encore $\mathrm{Sp}(B) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
- (b) Déterminer $\mathrm{rg}(B - 2I)$. En déduire une base de $E_{\lambda_1}(B)$.
- (c) Déterminer une base (X) de $E_{\lambda_2}(B)$.
- (d) Peut-on former une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par concaténation de familles de vecteurs propres ?
- (e) Déterminer un vecteur Y tel que (X, Y) forme une base de $\mathrm{Ker}((B - \lambda_2 I)^2)$. Vérifier que $BY = X - Y$.
- (f) Montrer que (U, X, Y) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En notant Q la matrice de passage vers cette base, à quoi sera égale la matrice $T = Q^{-1}BQ$?
- (g) Déterminer, à l'aide de la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$, explicitement la matrice T^n.

Partie 2 - Surf aléatoire

Un.e internaute est susceptible d'aller sur trois sites internet numérotés $1, 2$ et 3. On suppose que, à chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, l'internaute clique au hasard sur un lien présent sur la page qu'il consulte et que tous les liens d'une même page sont équiprobables.
À l'instant 0, l'internaute choisit au hasard l'un des trois sites internet.

Les sites internet sont représentés par les sommets sur le graphe orienté et pondéré ci-dessous; la présence d'un arc vers un autre sommet indique la présence d'un lien du site dont l'arc part vers le site représenté par le sommet où l'arc arrive et la probabilité de cliqué dessus est égale au poids représenté sur l'arc.



On note alors X_n la variable aléatoire qui prend la valeur du site internet sur lequel navigue l'internaute à l'instant n et on introduit

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{[X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3]\}$ forme un système complet d'évènements.

(1) Quelle est la loi de X_0? Expliciter U_0.

(2) Recopier et compléter la fonction Python suivante de sorte qu'elle renvoie une simulation de X_n.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n):
    x= [ ....... ]
    for k in range(n) :
        r=rd.rand()
        if ......... :
            if ....... :
                x.append(....)
            else :
                x.append(....)
        elif ....... :
            if ....... :
                x.append(....)
            else :
                x.append(....)
        else :
            if ....... :
                x.append(....)
            else :
                x.append(....)
    return ........
```

(3) Recopier et exécuter les instructions suivantes. Expliquer à quoi elles correspondent. Après un grand nombre de clics aléatoires, arrive-t-on plus souvent sur un site qu'un autre?

```
import matplotlib.pyplot as plt

n=100
site=np.zeros(3)
for k in range(1000):
    site[simul_X(n)-1]+=1
site = site/1000
plt.bar([1,2,3], site)
plt.show()
```

(4) Justifier rigoureusement qu'il existe une matrice $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, appelée *matrice de transition*, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$U_{n+1} = U_n T.$$

(5) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = U_0 T^n$.

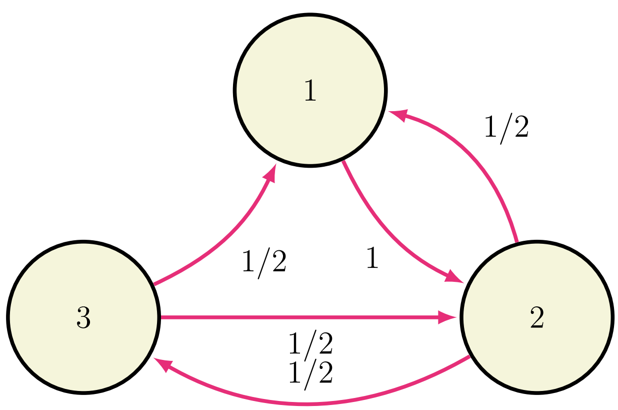
(6) Exprimer T en fonction de la matrice A de la Partie 1. En déduire l'expression de T^n puis la loi de X_n.

(7) On appelle *indice de notoriété* du site i la valeur $p_i = \lim P(X_n = i)$.

 (a) Déterminer l'indice de notoriété de chacun des trois sites. Commenter.

 (b) Que dire du vecteur $\Pi = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$ par rapport à la matrice ${}^tT$?

(8) Que dire d'un réseau de sites internet connectés selon le graphe suivant ? Proposer un programme permettant de calculer des valeurs approchées des indices de notoriétés de chaque site.



Problème 2*

On réserve cet exercice aux étudiant.e.s inscrit.e.s à (au moins) une école du Top 5.

Partie I - Résultats préliminaires

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

(1) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [0;1]$,
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

(2) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$, et pour tout réel $t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$,
$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right).$$

(3) En intégrant l'inégalité précédente, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$,
$$\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}.$$

(4) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$\left| \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n}$$
puis que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(5) Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose
$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que , pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

(b) En déduire que, pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0).$$

(c) Déterminer$I(p+q, 0)$ et montrer finalement que
$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Partie II - Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère un paramètre entier $m \geq 2$ et une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ (où $p \in [0; 1]$).

(6) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de Y, puis à l'aide de la formule de Huygens-Kœnig, montrer que
$$E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2.$$

Soit $n \geq 2$ un entier. On découpe alors l'intervalle $[0, 1[$ selon la subdivision suivante. On note, pour $k \geq [\![0, n]\!]$, $x_k = k/n$ de sorte que
$$[x_0, x_1[\cup [x_1, x_2[\cup .. \cup [x_{n-1}, x_n[= \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[= [0, 1[.$$

On considère alors une première suite de variables aléatoires (U_n) telle que, U_n suit loi uniforme sur $\{x_0, .., x_{n-1}\}$, c'est à dire que, pour tout $\ell \in [\![0; n-1]\!]$,
$$P(U_n = x_\ell) = \frac{1}{n}.$$

Puis, on introduit une suite de variables aléatoires (X_n) définie conditionnellement à l'évènement $[U_n = x_\ell]$. Plus précisément, sachant que $[U_n = x_\ell]$,
$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{\ell}{n}\right).$$

(7) Déterminer l'expression de la loi conditionnelle de X_n sachant $[U_n = x_\ell]$ puis donner l'expression de la loi marginale de X_n.

(8) Utiliser la première question pour donner, sans calcul supplémentaire, la valeur de la somme
$$\sum_{i=0}^{m} i \binom{m}{i} \left(\frac{\ell}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)^{m-i}.$$

(9) En déduire alors que
$$E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}.$$

(10) En utilisant à nouveau la première question, donner sans calcul la valeur de la somme
$$\sum_{i=0}^{m} i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{\ell}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)^{m-i}.$$

(11) En déduire que
$$E(X_n(X_n-1)) = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$
puis que
$$V(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}.$$

(12) (a) En utilisant les résultats obtenus aux deux premières questions de la première partie, calculer, pour tout $i \in X_n(\Omega)$,
$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(X_n = i\right).$$
(b) $(*)$ En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.
(c) Vérifier que
$$\lim_{n \to +\infty} E\left(X_n\right) = E\left(X\right), \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} V(X_n) = V(X).$$