Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°6

Solution

Amuse-bouche

(1) L'intégrale est impropre en $+\infty$. Observons qu'on peut affirmer immédiatement qu'elle est convergente grâce au critère de comparaison par négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives. En effet, on a

$$\frac{\ln(t)^2}{t^3} = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \to +\infty$$

par croissance comparée.
Posons $X > 1$ et introduisons les deux fonctions u et v définies par

$$\begin{cases} u'(t) &= 1/t^3 \\ v(t) &= \ln(t)^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u(t) &= -1/2t^2 \\ v'(t) &= 2\ln(t)/t \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, X]$ rendant l'IPP licite, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{\ln(t)^2}{t^3}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\ln(t)^2}{2t^2}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\ln(t)}{t^3}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(X)^2}{2X^2} + \int_1^X \frac{\ln(t)}{t^3}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On introduit alors deux nouvelles fonctions (et par abus de notation, on les appelle encore u et v) de sorte à transformer l'intégrale ci-dessus.

$$\begin{cases} u'(t) &= 1/t^3 \\ v(t) &= \ln(t) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u(t) &= -1/2t^2 \\ v'(t) &= 1/t \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, X]$ et on peut faire l'IPP pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{\ln(t)}{t^3}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\ln(t)}{2t^2}\right]_1^X + \frac{1}{2}\int_1^X \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \\ &= -\frac{\ln(X)}{2X^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^X \\ &= -\frac{\ln(X)}{2X^2} - \frac{1}{4X^2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Au final

$$\int_1^X \frac{\ln(t)^2}{t^3}\mathrm{d}t = -\frac{\ln(X)^2}{2X^2} + \left(-\frac{\ln(X)}{2X^2} - \frac{1}{4X^2} + \frac{1}{4}\right) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4},$$

par croissance comparée. Ainsi, (on retrouve que) l'intégrale converge et vaut $1/4$.

(2) L'intégrale est impropre en $+\infty$. Posons $X > 2$ et $u = u(t) = \ln(t)$. La fonction u est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, X]$ rendant licite le changement de variable qui donne $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t/t$ ce qui permet d'écrire

$$\int_2^X \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\alpha} = \int_{\ln(2)}^{\ln(X)} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha}$$

Comme $\ln(X) \to +\infty,\ X \to +\infty$, et que, par Riemann,

$$\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1,$$

on peut affirmer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

(Cette intégrale s'appelle une intégrale de Bertrand.)

Exercice - *Méthode de la variation de la constante*

(1) On considère une fonction f, définie et continue sur un intervalle I, un réel $a \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle, d'inconnue y,

$$(E_1) \qquad y'(t) + ay(t) = f(t), \qquad (t \in I).$$

(a) L'équation homogène (aussi appelée équation sans second membre) est l'équation

$$(H_1) \qquad y'(t) + ay(t) = 0, \qquad (t \in I).$$

D'après le cours l'ensemble des solutions est l'espace vectoriel

$$S_1 = \{t \mapsto \lambda e^{-at}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(y_1)$$

où $y_1 :\ t \mapsto e^{-at}$.

(b) On introduit alors la fonction $y_0 :\ t \mapsto \lambda(t)y_1(t)$, où λ est une fonction définie et dérivable sur I que l'on cherche à déterminer.

(i) Il suffit d'utiliser la formule de dérivée d'un produit et le fait que $y_1' + ay = 0$ après une factorisation par $\lambda(t)$. Plus précisément, observant que, pour $t \in I$,

$$y_0'(t) = \lambda'(t)y_1(t) + \lambda(t)y_1'(t)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
y_0 \text{ est solution de } (E_1) &\iff \forall t \in I, \quad y_0'(t) + ay_0(t) = f(t)\\
&\iff \forall t \in I, \quad \lambda'(t)y_1(t) + \lambda(t)y_1'(t) + a\lambda(t)y_1(t) = f(t)\\
&\iff \forall t \in I, \quad \lambda'(t)y_1(t) + \lambda(t)(y_1'(t) + ay_1(t)) = f(t)\\
&\iff \forall t \in I, \quad \lambda'(t)y_1(t) = f(t)\\
&\iff \forall t \in I, \quad \lambda'(t) = f(t)e^{at}
\end{aligned}$$

(ii) D'après la question précédente, dès lors que λ est **une** primitive de $t \mapsto f(t)e^{at}$, la fonction $t \mapsto \lambda(t)e^{-at}$ (par hypothèse continue sur I) est solution de (E_1). Soit alors $\alpha \in I$. Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$t \mapsto \int_\alpha^t f(s)e^{as}\mathrm{d}s$$

est la primitive de $t \mapsto \lambda(t)e^{-at}$ qui s'annule en α. De ce qui précède, on déduit que

$$y_0 : t \mapsto \left(\int_\alpha^t f(s)e^{as}\mathrm{d}s\right) e^{-at}$$

est une solution particulière de (E_1).

(2) **Exemple.** Considérons l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad\qquad y' - y = t^2e^t$$

(a) En notant $y_1 : \mapsto e^t$, on a une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée à (E_1).

(b) On cherche une solution particulière de la forme

$$y_1(t) = \lambda(t)e^t = \lambda(t)y_0(t)$$

où λ est une fonction à déterminer. Comme y_1 doit être solution de (E_1) et que y_0 est solution de l'équation homogène associée, on a nécessairement, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda'(t)e^t = t^2e^t$$

ou encore

$$\lambda'(t) = t^2.$$

Ainsi, en prenant

$$y_1(t) = \frac{t^3}{3}e^t,$$

on a une solution particulière de (E_1). (Ce qu'on vérifie

$$y_1'(t) - y_1(t) = t^2e^t + \frac{t^3}{3}e^t - \frac{t^3}{3}e^t = t^2e^t.)$$

(c) Par principe de superposition, l'ensemble de toutes les solutions de E_1 s'écrit

$$\mathcal{S}_1 = \left\{t \mapsto \lambda y_0(t) + y_1(t) = \left(\lambda + \frac{t^3}{3}\right)e^t, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Problème 1

Un grand merci à mon collègue et ami Sofiane Akkouche (René Cassin, Bayonne) qui a gentiment proposé de rédiger la solution de ce problème.

Partie 1 - Réduction de matrices 3×3

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ M^3 - 3M = 2I\}.$$

(1) La matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ n'appartient pas à $\mathcal{F}$ (car elle ne vérifie pas la relation $M^3-2M=I$) donc $\mathcal{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(2) On calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ce qui permet de vérifier la relation $A^3-3A=2I$. De même pour B.
Ainsi, $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$.

(3) On a facilement : $AU = 2U$ et $BU = 2U$.
Comme $U \neq 0$, on en déduit que $\lambda_1 = 2$ est une valeur propre commune à A et B.

(4) On a vu que $A^3-3A=2I$ soit $A^3-3A-2I=0$. Et on a de même $B^3-3B-2I=0$.
Ainsi, le polynôme $R(X) = X^3-3X-2$ est un polynôme annulateur commun à A et B.
On a : $R(2) = 2^3-3.2-2 = 0$ donc $\lambda_1 = 2$ est bien une racine de R.
On vient d'obtenir 2 comme racine de $R(X)$ ce qui permet de factoriser ce polynôme par $(X-2)$.
On a alors :

$$R(X) = X^3-3X-2 = (X-2)(aX^2+bX+c)$$

soit

$$X^3-3X-2 = aX^3+(b-2a)X^2+(c-2b)X-2c$$

ce qui donne par identification : $a=1$, $c=1$ puis $b=2$.
On a donc : $R(X) = (X-2)(X^2+2X+1) = (X-2)(X+1)^2$.
Ainsi, les racines de R sont $\{-1,\, 2\}$.

(5) On propose deux méthodes pour répondre à la question :

- Méthode 1 :
  Soit $M \in \mathcal{F}$.
  Il est clair que le polynôme R est un polynôme annulateur de M.
  Ainsi, les valeurs propres possibles de M sont les racines de $R(X)$ donc les valeurs propres possibles de M sont $\{-1,\, 2\}$.
  Ainsi, $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$ donc M est inversible.

- Méthode 2 :
  Soit $M \in \mathcal{F}$. On a donc : $M^3-3M=2I$ soit $M^2\left(\frac{1}{2}(M-3I)\right) = I$ ce qui montre que M est inversible d'inverse $\frac{1}{2}(M-3I)$.

(6) **Réduction de** A.

(a) Comme R est un polynôme annulateur de A et que les racines de $R(X)$ sont $\{-1,\, 2\}$ on en déduit que les valeurs propres possibles de A sont $\{-1,\, 2\}$.
On a vu précédemment que 2 est une valeur propre de A (car $AU=2U$).
D'autre part, la matrice $A+I$ n'est pas inversible (ses colonnes sont égales) donc -1 est également une valeur propre de A.
Finalement $\mathrm{Sp}(A) = \{-1,\, 2\}$.

(b) $E_{-1}(A) = \mathrm{Ker}(A+I)$. On obtient après calculs

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(V, W).$$

La famille (V, W) engendre $E_{-1}(A)$ et elle est libre (2 vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $E_{-1}(A)$.

(c) La famille (U, V, W) est libre comme concaténation de deux familles libres de deux SEP distincts. Elle contient 3 vecteurs et $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$ donc c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
La matrice de passage de la base canonique vers la base (U, V, W) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) On obtient par application du pivot de Gauss simultané sur P et I

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice dépend bien sûr des vecteurs V et W précédents.

(e) On a vu précédemment que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Ainsi, A est diagonalisable donc d'après la formule de changement de base (avec la matrice de passage P précédente), on a : $A = PDP^{-1}$ soit $D = P^{-1}AP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrice contenant les valeurs propres de A rangées dans le même ordre que les colonnes vecteurs propres de la matrice P.

(f) On procède par récurrence.

- initialisation. Pour $n = 1$: $A^1 = A$ et $A = PD^1P^{-1}$ d'où le résultat.
- hérédité. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
  On a alors, en utilisant l'HR et la relation $A = PDP^{-1}$:

$$A^{n+1} = A^nA = PD^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

(g) On calcule :

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 2^n & 2^n \\ (-1)^n & -2(-1)^n & (-1)^n \\ (-1)^n & (-1)^n & -2(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2\,(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2\,(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2\,(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(7) **Réduction de B.**

(a) Comme R est un polynôme annulateur de B et que les racines de $R(X)$ sont $\{-1, 2\}$ on en déduit que les valeurs propres possibles de B sont $\{-1, 2\}$.
On a vu précédemment que 2 est une valeur propre de B (car $BU = 2U$).
D'autre part, la matrice $B+I$ n'est pas inversible (deux lignes égales) donc -1 est également une valeur propre de B.
Finalement $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 2\}$.

(b) On a : $B - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(B-2I) &= \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3) \\ &= \mathrm{rg}(C_1, C_2) \quad \text{car } C_3 = -C_2 - C_1 \\ &= 2 \quad \text{car } (C_1, C_2) \text{ est libre} \end{aligned}$$

On en déduit d'après le théorème du rang que :
$\dim(\mathrm{Ker}(B-2I)) + \mathrm{rg}(B-2I) = 3$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(B-2I)) = 1$ soit $\dim(E_2(B)) = 1$.
Or, on a vu que $U \in E_2(B)$ (car $BU = 2U$).
Comme U est non nul, la famille (U) constitue une base de $E_2(B)$.

(c) $E_{-1}(B) = \mathrm{Ker}(B+I)$. On obtient après calculs :

$$E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(X).$$

La famille (X) engendre $E_{-1}(B)$ et elle est libre (1 vecteur non nul) donc c'est une base de $E_{-1}(B)$.

(d) Par l'absurde. Si B était diagonalisable, il existerait une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B. Cette base est alors constituée de trois vecteurs, mais B n'admet que deux valeurs propres distinctes. Ainsi, nécessairement, (au moins) deux des vecteurs précédents sont associés à la même valeur propre (principe des tiroirs et des chaussettes). La famille constituée de ces deux vecteurs, qui sont donc dans le même sous-espace propre, est libre, mais ce sous-espace est de dimension 1 par ce qui précède. C'est donc absurde. B n'est pas diagonalisable.

(e) $(B+I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. On obtient après calculs :

$$\mathrm{Ker}((B+I)^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

soit en remplaçant le premier par la somme des deux :

$$\mathrm{Ker}((B+I)^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(X, Y)$$

avec $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et on vérifie bien que : $BY = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = X - Y$.

(f) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$aU + bX + cY = 0 \iff \begin{cases} a - 2b - 2c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + b + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 2b - 2c = 0 \\ a + b = 0 \\ 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b = c = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la famille (U, X, Y) est libre et contient trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension trois donc la famille (U, X, Y) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
En notant f l'endomorphisme dont la matrice est B dans la base canonique, T représente

alors f dans la base (U, X, Y), ce qui donne d'après la formule de changement de base :

$$T = Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

car $f(U) = 2U$, $f(X) = -X$ et $f(Y) = X - Y$ (car $BU = 2U$, $BX = -X$ et $BY = X - Y$).

(g) On a : $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

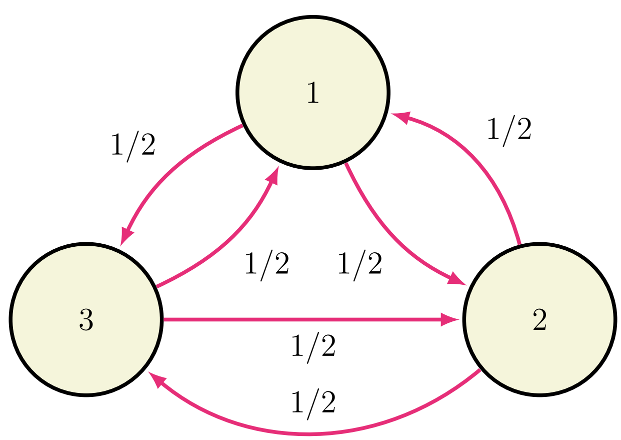
Les matrices D et N commutent et on a $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$, ce qui donne d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} I D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} \\ &= D^n + nND^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie 2 - Surf aléatoire

Un.e internaute est susceptible d'aller sur trois sites internet numérotés $1, 2$ et 3. On suppose que, à chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, l'internaute clique au hasard sur un lien présent sur la page qu'il consulte et que tous les liens d'une même page sont équiprobables.
À l'instant 0, l'internaute choisit au hasard l'un des trois sites internet.

Les sites internet sont représentés par les sommets sur le graphe orienté et pondéré ci-dessous; la présence d'un arc vers un autre sommet indique la présence d'un lien du site dont l'arc part vers le site représenté par le sommet où l'arc arrive et la probabilité de cliqué dessus est égale au poids représenté sur l'arc.



On note alors X_n la variable aléatoire qui prend la valeur du site internet sur lequel navigue l'internaute à l'instant n et on introduit

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{[X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3]\}$ forme un système complet d'évènements.

(1) X_0 suit clairement la loi uniforme sur $\{1,2,3\}$ ce qui donne : $U_0 = \begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$.

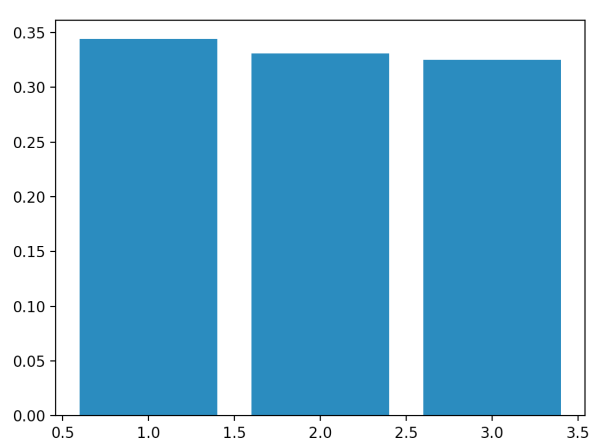
(2) Il faut distinguer la valeur de X_k pour déterminer, selon le résultat d'un jet aléatoire (avec `rd.rand()`) la valeur que prend X_{k+1}.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n):
    x= [rd.randint(1,4)]
    for k in range(n) :
        r=rd.rand()
        if x[k]==1 :
            if r <1/2 :
                x.append(2)
            else :
                x.append(3)
        elif x[k]==2:
             if r<1/2:
                x.append(1)
             else :
                x.append(3)
        else :
             if r<1/2:
                x.append(1)
             else :
                x.append(2)
    return x[n]
```

(3) L'exécution du programme précédent donne le diagramme à bâton ci-contre. Les hauteurs des bâtons correspondent aux *fréquences* des valeurs prises par X_{100} lors de 1000 simulations et fournissent donc (tout deviendra plus clair après le Chapitre *Estimation* notamment le paragraphe sur l'estimation ponctuelle du paramètre d'une Bernoulli) des valeurs approchées de la loi de X_{100} qui semble alors être uniforme, les trois sites semblent donc visités de manière équiprobables après un grand nombre de clics aléatoires.

Affichage Python



(4) D'après la FPT avec le SCE $((X_n=1), P(X_n=2), P(X_n=3))$, on a :

$$P(X_{n+1}=1) = P(X_n=1)\underbrace{P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)}_{=0} + P(X_n=2)\underbrace{P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)}_{=1/2} + P(X_n=3)\underbrace{P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1)}_{=1/2}$$

$$= \frac{1}{2}P(X_n=2) + \frac{1}{2}P(X_n=3)$$

De même, on a :

$$P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{2}P(X_n=1) + \frac{1}{2}P(X_n=3)$$

et

$$P(X_{n+1}=3) = \frac{1}{2}P(X_n=1) + \frac{1}{2}P(X_n=2)$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = U_n T$, avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

(5) On procède par récurrence (et c'est facile, interdit de ne pas savoir traiter cette question!).

- initialisation. Pour $n=0$: $U_0 = U_0 I = U_0 T^0$ d'où le résultat.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $U_n = U_0 T^n$.
  On a alors, en utilisant l'HR et la relation $U_{n+1} = U_n T$:

$$U_{n+1} = U_n T = U_0 T^n T = U_0 T^{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = U_0 T^n$.

(6) On a clairement : $T = \frac{1}{2}A$.

On a alors : $T^n = \frac{1}{2^n}A^n$. On a vu que : $U_n = U_0 T^n = \frac{1}{3}\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} A^n$ ce qui donne avec le résultat du calcul de A^n :

$$U_n = \frac{1}{3}\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$$

soit

$$U_n = \frac{1}{9}\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}3.2^n & 3.2^n & 3.2^n\end{pmatrix}$$

soit

$$U_n = \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{3}}_{P(X_n=1)} & \underbrace{\frac{1}{3}}_{P(X_n=2)} & \underbrace{\frac{1}{3}}_{P(X_n=3)} \end{pmatrix}$$

ce qui correspond à la loi de X_n (par définition de U_n).

(7) On appelle *indice de notoriété* du site i la valeur $p_i = \lim P(X_n = i)$.

(a) X_n étant un vecteur constant égal à $\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$, on a clairement $p_i = \lim P(X_n = i) = \frac{1}{3}$ pour tout $i \in \{1,2,3\}$.
C'est cohérent étant donné la situation d'équiprobabilité de l'expérience.

(b) On remarque que ${}^tT\Pi = {}^tT\Pi = {}^tT\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix} = \Pi$
et donc que le vecteur Π est un vecteur propre de ${}^tT$ $(\Pi \neq 0)$ associé à la valeur propre 1.

(8) Le *graphe* proposé correspond à une *matrice de transition* $T = (1/2)B$. On peut adapter l'approche *empirique* précédente avec Python pour simuler la variable X_n dans ce cas (toujours avec $n = 100$) et émettre une conjecture. Il semble qu'il n'y a plus équiprobabilité. Le site 2 sera plus visité que les deux autres.
Pour démontrer ce résultat précisément, il faudrait appliquer le vecteur U_0 à la matrice T_n en utilisant le résultat de la Partie 1 sur les puissances de B. C'est laborieux et on omet les détails qu'on attendait pas ici. Néanmoins, on voit que

$$E_1({}^tT) = E_2({}^tB) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, un vecteur propre de ${}^tT$ associé à 1 dont la somme des composantes fait 1 serait

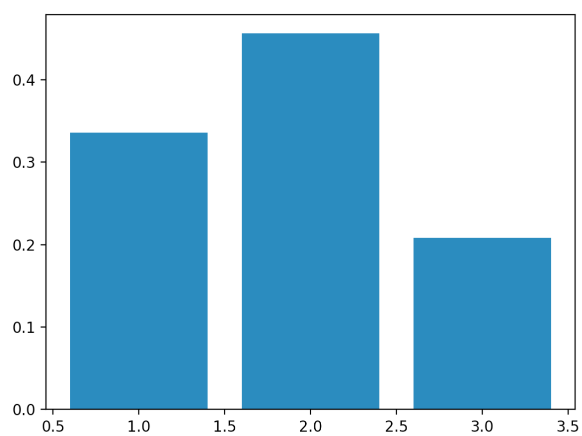
$$\Pi = \begin{pmatrix} 3/9 \\ 4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$

Une fois qu'on aura fait le Chapitre 13 sur les chaînes de Markov, on verra que ${}^t\Pi$ est l'état stable de la chaîne et ce qu'on observe avec Python est bien la convergence de la chaîne vers cet état stable, c'est à dire une convergence en loi de (X_n) vers Z avec

$$P(Z=1) = \frac{3}{9}, \quad P(Z=2) = \frac{4}{9}, \quad P(Z=3) = \frac{2}{9}$$

qui sont aussi les valeurs des indices de notoriété des trois sites de ce réseau.

Affichage Python



Problème 2*

Cet exercice, avec une première partie théorique, visant à démonter le résultats sur les sommes de Riemann, provient du sujet **EDHEC 2008**.
On retrouve l'intégrale à double paramètre $I(p,q)$ dans le sujet **EDHEC 2022**.

Partie I - Résultats préliminaires

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

(1) Par hypothèse f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, en particulier sa dérivée f' est continue sur $[0;1]$ (intervalle fermé borné) et y est donc bornée en atteignant ses bordes; il existe donc $M > 0$ tel

que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0;1]$. En appliquant ensuite l'inégalité des accroissements finis, on obtient bien, pour $x, y \in [0;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

(2) Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente avec $x = t$ et $y = k/n$ qui sont bien des éléments de $[0;1]$. Comme $t \geq k/n$ on a bien

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right).$$

(3) Par les propriétés de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} M\left(t - \frac{k}{n}\right) \mathrm{d}t \\
&= M \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t - \frac{k}{n}\right) \mathrm{d}t = M\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\
&= \frac{M}{2n^2}.
\end{aligned}$$

(4) En sommant l'inégalité obtenue à la question précédente et avec l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

par la relation de Chasles et on a bien l'inégalité demandée. Comme $M/(2n) \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$, le théorème des gendarmes assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(5) Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \mathrm{d}x.$$

(a) C'est une intégration par parties. Les deux fonctions sous l'intégrale étant $\mathcal{C}^1$ sur $[0;.1]$, elle est parfaitement légale et on a

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_0^1 x^p (1-x)^q \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right] + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-q)^{q-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{q}{p+1} I(p+1,q-1). \end{aligned}$$

(b) On montre, par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la formule est vraie:

- <u>initialisation:</u> pour $q = 0$, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I(p,0) = \frac{p!0!}{(p+0)!} I(p+0,0)$$

  car $0! = 1$.
- <u>hérédité:</u> supposons que, pour un certain $q \in \mathbb{N}$, on ait la formule vérifiée pour tout $p \in \mathbb{N}$. (HR). Alors;

$$\begin{aligned} I(p,q+1) &= \frac{q+1}{p+1} I(p+1,q+1-1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1,q) \\ &= \frac{q+1}{p+1}\frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+q+1,0) \qquad \text{(par HR)} \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1,0), \end{aligned}$$

  ce qui termine bien la récurrence.

(c) Le calcul est facile

$$I(p+q,0) = \int_0^1 x^{p+q}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+q+1}}{(p+q+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$$

et il découle de la question précédente que

$$I\,(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Partie II - Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère un paramètre entier $m \geq 2$ et une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ (où $p \in [0;1]$).

(6) Si $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$, alors $E(Y) = mp$ et $V(Y) = mp(1-p)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} E(Y(Y-1)) &= E(Y^2 - Y) \\ &= E(Y^2) - E(Y) \\ &= E(Y^2) - E(Y)^2 + E(Y)^2 - E(Y) \\ &= V(Y) + E(Y)^2 - E(Y) \\ &= mp(1-p) + m^2p^2 - mp \\ &= m(m-1)p^2, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité attendue.

Soit $n \geq 2$ un entier. On découpe alors l'intervalle $[0,1[$ selon la subdivision suivante. On note, pour $k \geq [\![0,n]\!]$, $x_k = k/n$ de sorte que

$$[x_0, x_1[\cup[x_1, x_2[\cup .. \cup [x_{n-1}, x_n[= \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[= [0,1[.$$

On considère alors une première suite de variables aléatoires (U_n) telle que, U_n suit loi uniforme sur $\{x_0, .., x_{n-1}\}$, c'est à dire que, pour tout $\ell \in [\![0; n-1]\!]$,

$$P\left(U_n = x_\ell\right) = \frac{1}{n}.$$

Puis, on introduit une suite de variables aléatoires (X_n) définie conditionnellement à l'évènement $[U_n = x_\ell]$. Plus précisément, sachant que $[U_n = x_\ell]$,

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{\ell}{n}\right).$$

(7) Il découle de l'énoncé que

$$P_{[U_n = x_\ell]}(X_n = k) = \binom{m}{k} \left(\frac{\ell}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\ell}{n}\right)^{m-k}.$$

D'après la formule des probabilités totales, la famille $\{[U_n = x_k] : \ 0 \leq k \leq n-1\}$ formant un s.c.e,

$$\begin{aligned} P(X_n = i) &= \sum_{k=0}^{n-1} P\left(X_n = i | U_n = \frac{k}{n}\right) P\left(U_n = \frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \\ &= \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(8) Si $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$, alors, par définition de l'espérance et grâce au rappel de la première question de cette partie,

$$\sum_{i=0}^{m} i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} = E(Y) = \frac{mk}{n}.$$

(9) On en déduit que

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{i=0}^{m} iP(X_n = i) \\
&= \sum_{i=0}^{m} i\left(\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{mk}{n} \\
&= \frac{m}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k \\
&= \frac{m}{n^2}\times\frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{m(n-1)}{2n},
\end{aligned}$$

ce qui était demandé.

(10) Par le théorème de transfert, si $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$, alors

$$\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = E(Y(Y-1)) = m(m-1)\left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

(11) Il suit que, toujours par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E(X_n(X_n-1)) &= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)P(X_n = i) \\
&= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\left(\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{m(m-1)k^2}{n^2} \\
&= \frac{m(m-1)}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\
&= \frac{m(m-1)}{n^3}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2},
\end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned} V(X_n) &= E(X_n(X_n-1)) - E(X_n)^2 + E(X_n) \\ &= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} - \left(\frac{m(n-1)}{2n}\right)^2 + \frac{m(n-1)}{2n} \\ &= \frac{2m(m-1)(n-1)(2n-1) - 3m^2(n-1)^2 + 6mn(n-1)}{12n^2} \\ &= \frac{m(n-1)\left(2(2n-1)(m-1) - 3m + 6n\right)}{12n^2} \\ &= \frac{m(n-1)(mn+m+2n+2)}{12n^2} \\ &= \frac{m(n-1)(n+1)(m+2)}{12n^2} \\ &= \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(12) (a) En posant, pour $i \in [\![0;m]\!]$, $f_i(x) = x^i(1-x)^{m-i}$, qui définit bien une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (car polynomiale) sur $[0;1]$, les résultats de la partie préliminaire permettent de voir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = \int_0^1 f_i(x)\mathrm{d}x = I(i,m-i) = \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!}.$$

En particulier, on obtient donc que

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = i) = \binom{m}{i}\frac{i!(m-i)!}{(m+1)!} = \frac{m!}{(m+1)!} = \frac{1}{m+1}.$$

(b) Il découle de la question précédente que X_n converge en loi vers la loi uniforme sur $[\![0;m]\!]$, c'est à dire $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0;m]\!])$.

(c) On sait, d'après le cours, que

$$E(X) = \frac{m}{2}, \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(m+1)^2-1}{12} = \frac{m^2+2m}{12} = \frac{m(m+2)}{12}.$$

Comme $(n-1)/n \to 1$, $n \to +\infty$, et $(n^2-1)/n^2 \to 1$, $n \to +\infty$, on a bien $E(X_n) \to E(X)$ et $V(X_n) \to V(X)$.