Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°7

À rendre le 20/01

Exercice

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

(1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.
(2) Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
(3) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
   (a) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.
   (b) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(4) Espérance et variance.
   (a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
   Montrer que $E(X)$ et $V(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.
   (b) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(5) Simulation à partir d'une loi exponentielle.
Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.

   (a) En utilisant le système complet naturellement associé à V, montrer que $X = (2V-1)U$ suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
   (b) Compléter la définition Python ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$:

```
def Laplace(alpha, beta):
    if ......... <= 1/2:
        V = 1
    else :
        V = 0
   return ................
```

Problème

Partie I - Une réduction orthogonale

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Justifier que M est diagonalisable.
(2) Déterminer les valeurs propres de M.
(3) Déterminer une base (X_1, X_2) de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M. On appelle Q la matrice de passage vers cette base. Quelle est la matrice $D = Q^{-1}MQ$?
(4) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on note $Q(a, b)$ la matrice donc la première colonne est aX_1 et la deuxième bX_2.
   (a) Justifier que, si a et b sont non nuls, alors $Q(a, b)$ est inversible et qu'on a encore

$$M = Q(a, b)DQ(a, b)^{-1}$$

   (b) Montrer qu'il existe des réels a, b tels que

$$Q(a, b)^{-1} = {}^tQ(a, b)$$

   Une telle matrice est dite orthogonale. On note alors, dans toute la suite $P = Q(a, b)$ pour un tel choix de réels. AInsi, on a

$$M = PD\,{}^tP$$

Partie II - Vecteurs gaussiens

L'objet de cete partie est l'étude de diverses propriétés des lois normales. Toutes les variables utilisées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On notera Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $f_{m,\sigma}$ une densite de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

On dit qu'une variable est **gaussienne** si elle suit une loi normale. On considère que la variable nulle suit une loi normale.

(5) Démontrer que $\forall a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) X suit la loi normale de paramètres m, σ^2 ;
   (ii) $aX + b$ suit la loi normale de paramètres $am + b, a^2\sigma^2$.

(6) Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$. Quelle est, d'après le cours, la loi suivie par $X_1 + X_2 + ... + X_n$?

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires. On dit que le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$, dont les composantes sont les variables aléatoires, est **gaussien** si pour tout $(a_1, a_2, ..., a_n)$ réels, la variable $a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n$ suit une loi normale.

On admet que les formules de calcul de covariance d'un couple de variables à densité sont identiques à celles d'un couple de variables discrètes. Plus précidément, on dit qu'un couple de variables à densité (X, Y) admettant toutes deux une espérance admet une covariance si et seulement si la variable $(X - E(X))(Y - E(Y))$ admet une espérance. On admet aussi que, si deux variables X et Y admettant toutes deux une espérance sont indépendantes, leur covariance est nulle.

(7) Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un vecteur gaussien. Montrer que chaque variable X_i suit une loi normale.

(8) Montrer que, si X_1, X_2,...,X_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales, alors le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est gaussien.

(9) Dans cette question X suit la loi normale centrée réduite, et Y, indépendante de X, suit la loi discrète définie par $P(Y=1)=P(Y=-1)=\frac{1}{2}$.

(a) Déterminer la loi de XY.
(b) Le vecteur (X, XY) est-il gaussien? On pourra calculer $P(X+XY=0)$.

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires admettant chacune une variance, on appelle **matrice de variance/covariance** et on note $M(X_1, X_2, ..., X_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $a_{i,j}$ sont donnés par

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad a_{i,j} = \text{cov}(X_i, X_j).$$

On appelle **vecteur espérance** et on note $E\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}\right)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients a_i sont donnés par

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad a_i = E(X_i).$$

(10) Justifier que $M(X_1, X_2, ..., X_n)$ est diagonalisable.

(11) Dans cette question (X, Y, Z) est un vecteur gaussien tel que

$$M(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad E\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer la loi de $X_1 = X+Y$ et celle de $X_2 = X+Z$.
(b) Écrire la matrice de variance/covariance $M(X_1, X_2)$.
(c) Soit M une matrice 2×2 dont les composantes sont des variables aléatoires admettant toutes une espérance. On note $E(M)$ la matrice dont les composantes sont les espérances des variables aléatoires qui la composent.
  (i) Soit M une matrice dont les composantes sont des variables aléatoires et A une matrice réelle. Justifier brièvement que
  $$E(A \cdot M) = A \cdot E(M).$$
  (ii) On note $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ et $\mathring{U} = U - E(U)$. Montrer que
  $$M(X_1, X_2) = E\left(\mathring{U} \cdot {}^t\mathring{U}\right).$$
(d) On reprend les notations de la Partie I. Montrer que les variables X' et Y' définies par
$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$
ont une covariance nulle.