Devoir Maison n°7

Solution

Exercice

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

(1) Vérifions que f est en effet une densité :

- Comme $\beta > 0$ et qu'une exponentielle est toujours strictement positive, $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition successive d'une fonction affine par celle-ci puis par l'exponentielle continue, f est continue sur $\mathbb{R}$.

- Il reste à vérifier que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

  Il faut commencer par se débarrasser de cette valeur absolue. Écrivons

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\beta} \exp\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right), & \text{si } t < \alpha \\[2ex] \dfrac{1}{2\beta} \exp\left(\frac{\alpha-t}{\beta}\right), & \text{si } t \geq \alpha \end{cases}.$$

  On observe une *symétrie* par rapport à α. Montrons alors que $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $1/2$. Soit $X > \alpha$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{X} \frac{1}{2\beta} \exp\left(\frac{\alpha-t}{\beta}\right) \mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2} \exp\left(\frac{\alpha-t}{\beta}\right)\right]_{\alpha}^{X} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\alpha-X}{\beta}\right) \\ &\underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est bien ce qu'on voulait. Le calcul se fait de la même manière entre $-\infty$ et α. Ainsi, f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

(2) Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, une densité est la fonction $f(t) = \dfrac{1}{2}e^{-|t|}$. On va naturellement distinguer deux cas.

- Soit $x < 0$. Considérons $B < 0$. On a
$$\int_B^x f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}e^t\right]_B^x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^B \underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{e^x}{2}.$$
Ainsi,
$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{e^x}{2}$$
- Soit $x \geq 0$. En réutilisant le calcul de primitive de la question (1), on a
$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = 1 - \frac{e^{-x}}{2}.$$

Au final,
$$\Psi(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2}, & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-x}}{2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(3) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.

(a) C'est un type de question classique qu'il faut savoir faire. Notons $Y = \beta X + \alpha$.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(\beta X + \alpha \leq x) \\ &= P\left(X \leq \frac{x-\alpha}{\beta}\right) \\ &= \Psi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, une densité de Y s'obtient en dérivant, ce qui donne
$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F'_Y(x) = \Psi'\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \times \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right) \end{aligned}$$
et on a bien reconnu la densité de la loi $\mathcal{L}(\alpha,\beta)$. Donc $Y = \beta X + \alpha$ suit bien cette loi.

(b) D'après ce qui précède, la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha,\beta)$ est donnée par
$$\Psi_{\alpha,\beta}(x) = \Psi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right), & \text{si } x < \alpha \\ 1 - \dfrac{1}{2}\exp\left(-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right), & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

(4) Espérance et variance.

(a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$. Ainsi, X a pour densité $f(t) = \dfrac{1}{2}e^{-|t|}$.

Comme f est paire, $t \mapsto tft)$ est impaire. Il suit que que

$$X \text{ admet une espérance} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \int_{0}^{+\infty} |t|f(t)\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Et en cas de convergence, l'espérance sera alors nulle. En observant que, pour $t \geq 0$,

$$tf(t) = \frac{1}{2}te^{-t},$$

on peut proposer plusieurs arguments pour la convergence de l'intégrale sur $[0,+\infty[$: soit on reconnait une fonction qui donne (au coefficient 1/2 près) l'espérance d'une v.a de loi exponentielle de paramètre 1 et donc dont l'intégrale converge, soit on fait un test de Riemann ($tf(t) = o(1/t^2)$, $t \to +\infty$ par croissance comparée). Bref, ça converge. Donc $E(X)$ existe et vu que la fonction est impaire on a

$$E(X) = 0.$$

L'existence de la variance est équivalente à celle du moment d'ordre 2, qui dans ce cas (vu que l'espérance est nulle) seront égales en cas d'existence. Cette fois $t \mapsto t^2 f(t)$ est paire. On se ramène donc à l'intégrale sur $[0;+\infty[$ dont on prendra le double en cas de convergence. On reconnait une intégrale classique qui se calcule par deux IPP successives, ou on peut utiliser le moment d'ordre 2 de la loi exponentielle. Plus précisément, notant $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$,

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\mathrm{d}t = E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2 = 1 + 1^2 = 2.$$

Ainsi,

$$V(X) = E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}t^2 e^{-t}\mathrm{d}t = 2.$$

(b) Le cours affirme qu'une transformée affine d'une variable aléatoire admettant variance et espérance admet encore variance et espérance. Si $Y \hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha,\beta)$, alors on peut écrire $Y = \beta X + \alpha$ avec $X \hookrightarrow \mathcal{L}(0,1)$ et on a, par linéarité de l'espérance et propriété de la variance

$$E(Y) = E(\beta X + \alpha) = \beta E(X) + \alpha = \alpha$$

puis

$$V(Y) = V(\beta X + \alpha) = \beta^2 V(X) = 2\beta^2.$$

(5) Simulation à partir d'une loi exponentielle.

Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.

(a) On va utiliser la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{[V=0],[V=1]\}$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P((2V-1)U \leq x) \\
&= P([(2V-1)U \leq x] \cap [V=0]) + P([(2V-1)U \leq x] \cap [V=1]) \\
&= P([-U \leq x] \cap [V=0]) + P([U \leq x] \cap [V=1]) \\
&= P(U \geq -x)P(V=0) + P(U \leq x)P(V=1) \qquad \text{(par indépendance des variables } U \text{ et } V) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - P(U \leq -x) + P(U \leq x)\right)
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas, selon que $x < 0$ ou $x \geq 0$.

- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et il suit que
$$F_X(x) = \frac{1}{2}(1 - 1 + e^{-(-x)}) = \frac{e^x}{2}$$
- Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$ et
$$F_X(x) = \frac{1}{2}(2 - e^{-x})$$

Bilan,
$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2}, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2}(2 - e^{-x}), & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \Psi(x)$$
ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{L}(0, 1)$.

(b) Sans difficulté avec la question précédente car on a une commande pour simuler la loi exponentielle, puis on passe de la loi $\mathcal{L}(0, 1)$ à la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

```
def Laplace(alpha, beta):
    if rd.rand( )<= 1/2:
        V = 1
    else :
        V = 0
    return beta*(2*V-1)*rd.exponential(1)+alpha
```

Problème

Partie I - Une réduction orthogonale

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) On observe que M est symétrique, donc diagonalisable.

(2) On a
$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } M(U,V) &\iff M(U,V) - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \det(M(U,V) - \lambda I) = 0 \\ &\iff (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \\ &\iff \lambda = 6 \text{ ou } \lambda = 1 \end{aligned}$$

(3) Déterminons maintenant une base de chaque sous-espace propre :

- Pour $\lambda = 6$,
$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_6 &\iff (M(U,V) - 6I)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \iff x = 2y \\ &\iff X = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a donc $E_6 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 &\iff (M(U,V) - I)X = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 2y &=& 0 \\ 2x + y &=& 0 \end{array} \right. \iff y = -2x \\ &\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a donc $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

Par concaténation de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

forme une famille libre et donc une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Notons Q la matrice de passage de la base canonique vers cette base. Par formule de changement de base, on a $M = QPQ^{-1}$ avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(4) La définition du texte nous indique que

$$Q(a,b) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -2a & b \end{pmatrix}$$

(a) Si a et b sont non nuls, alors les colonnes de $Q(a,b)$ sont encore des vecteurs propres de M associés respectivement aux mêmes valeurs propres et formant une famille libre et donc une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Par formule de changement de base, on a encore (vu qu'il s'agit d'une base de vecteurs propres rangés dans le même ordre)

$$M = Q(a,b)DQ(a,b)^{-1}$$

(b) Il faut résoudre un petit système correspondant à $Q(a,b)\,{}^tQ(a,b) = I$,

$$\begin{aligned} Q(a,b)\,{}^tQ(a,b) = I &\iff \begin{pmatrix} a^2 + 4b^2 & 2(b^2 - a^2) \\ 2(b^2 - a^2) & 4a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + 4b^2 &=& 1 \\ b^2 - a^2 &=& 0 \\ 4a^2 + b^2 &=& 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 &=& b^2 \\ a^2 &=& 1/5 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ce système a des solution. En prenant $a = b = \frac{1}{\sqrt{5}}$, on a donc trouvé une matrice $P = Q(a,b)$ qui convient, et on peut écrire

$$M = PD\,{}^tP$$

Partie II - Vecteurs gaussiens

L'objet de cette partie est l'étude de diverses propriétés des lois normales. Toutes les variables utilisées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On notera Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $f_{m,\sigma}$ une densite de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

On dit qu'une variable est **gaussienne** si elle suit une loi normale. On considère que la variable nulle suit une loi normale.

(5) On identifie les lois par leur fonction de répartition. Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $(i) \Longrightarrow (ii)$. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On note $Y = aX + b$. Alors,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(aX + b \leq X) \\ &= P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right), \end{aligned}$$

  où F_X désigne la fonction de répartition de X. Par composition, F_Y est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc Y est à densité et une densité de Y est donnée par

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \frac{1}{a} F_X'\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f_{m,\sigma}\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{x-b}{a} - m\right)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} \exp\left(-\frac{(x-b-am)^2}{2a^2\sigma^2}\right) \\ &= f_{am+b, a\sigma} \end{aligned}$$

  et on a bien $Y = aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

- Le sens $(ii) \Longrightarrow (i)$ se montre de la même manière et on omet le détail.

(6) Par le résultat de stabilité des lois normales du cours, les variables étant bien indépendantes et toutes normales, on peut affirmer que

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires. On dit que le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$, dont les composantes sont les variables aléatoires, est **gaussien** si pour tout $(a_1, a_2, ..., a_n)$ réels, la variable $a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n$ suit une loi normale.

On admet que les formules de calcul de covariance d'un couple de variables à densité sont identiques à celles d'un couple de variables discrètes. Plus précidément, on dit qu'un couple de variables à densité (X, Y) admettant toutes deux une espérance admet une covariance si et seulement si la variable $(X - E(X))(Y - E(Y))$ admet une espérance. On admet aussi que, si deux variables X et Y admettant toutes deux une espérance sont indépendantes, leur covariance est nulle.

(7) Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un vecteur gaussien. Par définition, pour tout $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}_n$, $a_1X_1 + ... + a_nX_n$ suit une loi normale. On choisit donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$a_i = (0, 0, .., 0, 1, 0, ..., 0)$$

où le 1 est placé à la $i-$ème composante, ce qui donne bien X_i de loi normale.

(8) On procède par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 1$, si X_1 suit une loi normale alors a_1X_1 suit aussi une loi normale (il faut utiliser la Question (5) mais on se contente de cette réponse).

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \geq 1$, $X_1, ..., X_n$ indépendantes de lois normales entraine que $(X_1, ..., X_n)$ vecteur gaussien.
  Considérons alors $X_1, ..., X_{n+1}$ des variables indépendantes de lois normales. Soit $(a_1, ..., a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors, par hypothèse de récurrence, on sait que $a_1X_1 + .. + a_nX_n$ suit une loi normale. Par lemme des coalitions, les variables aléatoires $a_1X_1 + .. + a_nX_n$ et $a_{n+1}X_{n+1}$ sont indépendantes. Comme $a_{n+1}X_{n+1}$ suit aussi une loi normale (par la Question (5)), le résultat de

stabilité de la Question (6) permet de conclure que

$$a_1X_1 + .. + a_nX_n + a_{n+1}X_{n+1}$$

est encore une loi normale. Ainsi $(X_1, ..., X_{n+1})$ est bien un vecteur gaussien et la récurrence terminée.

(9) Dans cette question X suit la loi normale centrée réduite, et Y, indépendante de X, suit la loi discrète définie par $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On utilise la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{[Y = 1], [Y = -1]\}$. On rappelle les propriétés de symétrie de Φ, fonction de répartition de $\mathcal{N}(0; 1)$, notamment que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, pour tout x réel. Ce qui donne

$$\begin{aligned}
F_{XY}(x) &= P(XY \leq x) = P([XY \leq x] \cap [Y = 1]) + P([XY \leq x] \cap [Y = -1]) \\
&= P([X \leq x] \cap [Y = 1]) + P([X \geq -x] \cap [Y = -1]) \\
&= \frac{1}{2}\left(P(X \leq x) + P(X \geq -x)\right) \qquad \text{par indépendance} \\
&= \frac{1}{2}\left(\Phi(x) + \Phi(x)\right) = \Phi(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut conclure que $XY \hookrightarrow N(0, 1)$.

(b) Comme suggéré par l'énoncé, on commence par calculer la probabilité de $X + XY = 0$. On a

$$\begin{aligned}
P(X + XY = 0) &= P(X(1 + Y) = 0) = P[(X = 0] \cup [1 + Y = 0]) \\
&= P(X = 0) + P(Y = -1) - P([X = 0] \cap [Y = -1]) \\
&= P(X = 0) + P(Y = -1) - P(X = 0)P(Y = -1) \\
&= P(Y = -1) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Si $X + XY$ était une variable à densité, cette probabilité serait nulle. Ce n'est pas le cas, $X + XY$ ne peut en particulier par être une loi normale et (X, XY) n'est pas un vecteur gaussien.

Contrairement à précédemment, les deux composantes normales du vecteurs ne sont donc pas ici indépendantes...

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires admettant chacune une variance, on appelle **matrice de variance/covariance** et on note $M(X_1, X_2, ..., X_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $a_{i,j}$ sont donnés par

$$\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2, \qquad a_{i,j} = \text{cov}(X_i, X_j).$$

On appelle **vecteur espérance** et on note $E\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}\right)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients a_i sont donnés par

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \qquad a_i = E(X_i).$$

(10) La matrice $M(X_1, X_2, ..., X_n)$ a pour coefficients $a_{i,j} = \text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i) = a_{j,i}$ et donc celle-ci est symétrique et donc, d'après le cours, diagonalisable.

(11) Dans cette question (X, Y, Z) est un vecteur gaussien tel que

$$M(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad E\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Par définition d'un vecteur gaussien, il est clair que X_1 et X_2 suivent des lois normales dont il reste à trouver les paramètres. Le premier paramètre est l'espérance et par linéarité de celle-ci et avec les valeurs du vecteur espérance, on a

$$E(X_1) = E(X) + E(Y) = 1 + 0 = 1, \qquad E(X_2) = E(X) + E(Z) = 1 + 1 = 2.$$

Le second paramètre est la variance, on utilise donc la formule sur la variance d'une somme est les valeurs de la matrice de variance/covariance ci-dessus

$$V(X_1) = V(X) + 2\text{cov}(X, Y) + V(Y) = 1 - 2 + 6 = 5$$

et

$$V(X_2) = V(X) + 2\text{cov}(X, Z) + V(Z) = 1 + 0 + 1 = 2$$

On peut conclure que

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 5), \qquad X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 2).$$

(b) On connait déjà $V(X_1)$ et $V(X_2)$. Il reste à calculer $\text{cov}(X_1, X_2)$. Par bilinéarité de la covariance, on a

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_1, X_2) &= \text{cov}(X + Y, X + Z) \\ &= V(X) + \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z) + \text{cov}(Y, Z) \\ &= 1 - 1 + 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Il suit que $M(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Soit M une matrice 2×2 dont les composantes sont des variables aléatoires admettant toutes une espérance. On note $E(M)$ la matrice dont les composantes sont les espérances des variables aléatoires qui la composent.

(i) Soit M une matrice dont les composantes sont des variables aléatoires et A une matrice réelle. Les coefficients de A étant des constantes, et la multiplication par A revenant à faire des combinaison linéaires des coefficients de M, la linéarité de l'espérance permet d'écrire

$$E(A \cdot M) = A \cdot E(M).$$

Il en est de même pour le produit par la droite par une matrice constante.

(ii) On note $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ et $\mathring{U} = U - E(U)$. Commençons par observer que

$$\begin{aligned} \mathring{U} \cdot {}^t\mathring{U} &= \begin{pmatrix} X_1 - E(X_1) \\ X_2 - E(X_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 - E(X_1) & X_2 - E(X_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (X_1 - E(X_1))^2 & (X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)) \\ (X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)) & (X_2 - E(X_2))^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par définition de la variance et de la covariance, on a bien

$$M(X_1, X_2) = E\left(\mathring{U} \cdot {}^t\mathring{U}\right).$$

(d) On reprend les notations de la Partie I. On note $V = \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix}$ de sorte que $V = {}^tPU$. Par linéarité, il est clair que

$$\overset{\circ}{V} = {}^tP\overset{\circ}{U}.$$

Comme on a ${}^tPM(X_1, X_2)P = D$,

$$\begin{aligned} M(X_1', X_2') &= E\left(\overset{\circ}{V} \cdot {}^t\overset{\circ}{V}\right) \\ &= E\left({}^tP\overset{\circ}{U} \cdot {}^t\left({}^tP\overset{\circ}{U}\right)\right) \\ &= {}^tP \cdot E\left(\left(\overset{\circ}{U} \cdot {}^t\overset{\circ}{U}\right)\right) \cdot {}^t\left({}^tP\right) \\ &= {}^tPM(X_1, X_2)P \\ &= D \end{aligned}$$

En particulier,

$$\operatorname{cov}(X_1', X_2') = 0$$

qui était le résultat demandé.