Mathématiques Approfondies - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
H2B - Lycée Carnot, Paris 17e.

Devoir Maison

À rendre le 20/01

Exercice 1

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- Soient F et G deux sous-espaces de E de même dimension d
- On note p_F le projecteur orthogonal sur F et p_G le projecteur orthogonal sur G.
- Soient $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_d)$ et $\mathcal{V} = (v_1, ..., v_d)$ des bases orthonormées de F et G respectivement.

On note $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la matrice définie par $b_{i,j} = \langle u_i, v_j \rangle$.

(1) (a) Vérifier que G est stable sous l'action de $p_G \circ p_F$. On note $\pi = p_G \circ p_F$.
(b) Montrer que π est un endomorphisme de G.
(c) Que vaut π si $F = G$? Même question si F et G sont orthogonaux.

(2) On suppose **dans cette question uniquement** que $E = \mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique) et que

$$F = \{(x, y, z) \in E : \ x + y = 0\}, \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in E : \ y + z = 0\}$$

(a) Que vaut d dans ce cas particulier ?
(b) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{U}$ de F dont le premier vecteur est $u_1 = (0, 0, 1)$ et une base orthonormée $\mathcal{V}$ de G dont le premier vecteur est $v_1 = (1, 0, 0)$.
(c) En déduire l'expression de ${}^tBB$.
(d) Déterminer les valeurs propres de la matrice ${}^tBB$.

(3) On revient au cas général.

(a) Soit $x \in G$. Montrer que $\pi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} \langle u_k, x \rangle \langle (u_k, v_i \rangle \right) v_i$.
(b) En déduire que la matrice de π dans la base $\mathcal{V}$ est ${}^tBB$ puis que π est un endomorphisme symétrique.

(c) Justifier qu'il existe un $d-$uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_d$ et une base orthonormée $\mathcal{C}$ de G telle que

$$\mathrm{Mat}(\pi, \mathcal{C}) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_d).$$

Montrer que ce $d-$uplet est unique.

(4) (a) Établir que, pour tout $x \in G$, on a

$$\langle x, \pi(x) \rangle = \langle x, p_F(x) \rangle = ||p_F(x)||^2.$$

(b) Soit λ une valeur propre de π et x un vecteur propre associé. Montrer que

$$\lambda ||x||^2 = ||p_F(x)||^2.$$

En déduire que $\lambda \in [0; 1]$.

(5) En déduire que, pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, il existe un unique $t_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\lambda_k = \cos^2(t_k)$, où les réels λ_k sont définis à la Question 3.

On désigne alors, pour tout couple (F, G) de sous-espaces de même dimension d, le $d-$uplet $(t_1, ..., t_d)$ par la notation $\mathrm{Angle}(F, G)$.

(6) **Exemples**.

(a) Montrer que $\mathrm{Angle}(F, G) = \left(\frac{\pi}{2}, ..., \frac{\pi}{2}\right)$ si et seulement si F et G sont orthogonaux.

(b) Montrer que $\mathrm{Angle}(F, G) = (0, ..., 0)$ si et seulement si F et G sont égaux.

(c) Déterminer $\mathrm{Angle}(F, G)$ dans le cas particulier de la Question 2.